Cadenas de Markov

D. González Sánchez

Otoño de 2026

Contenido

1. Cadenas de Markov homogéneas **1**
1.1. Propiedades básicas 1
1.2. Transición en n pasos 4
1.3. Filtraciones y tiempos de paro 5

2. Clasificación de estados **5**

3. Comportamiento asintótico **12**
3.1. Distribución estacionaria 12
3.2. Teoremas límite 14
3.3. Ley de los grandes números 16

4. Ejercicios **18**

1. Cadenas de Markov homogéneas

1.1. Propiedades básicas

Convenciones. En esta sección, S denota a un conjunto finito o infinito numerable. Asumimos que las variables aleatorias están definidas en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Como es usual, $\mathbb{N}$ denota al conjunto de números naturales y $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Una *distribución* sobre S es un vector fila $\mu = (\mu(x))_{x\in S}$ con $\mu(x) \geq 0$ y $\sum_x \mu(x) = 1$. Una *matriz estocástica* sobre S es una matriz $Q = [q(x,y)]_{x,y\in S}$ con

$$q(x,y) \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{y\in S} q(x,y) = 1 \qquad x, y \in S.$$

Definición 1.1. Sean μ una distribución y $Q = [q(x,y)]$ una matriz estocástica sobre S. Un proceso estocástico (X_n) es una **cadena de Markov homogénea** (CMH) con distribución inicial μ y matriz de transición Q si

(a) $\mathbb{P}[X_0 = x] = \mu(x)$ para todo x y

(b) para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cualesquiera estados $x_0, \dots, x_{n-1}, x, y$

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x] = p(x,y) \tag{1}$$

siempre que $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x] > 0$.

La igualdad (1) es la **propiedad de Markov** (pérdida de memoria): la probabilidad condicional depende de la historia sólo a través del estado actual x, y no depende de n (homogeneidad). Los números $q(x,y)$ son las **probabilidades de transición en un paso**.

Ejemplo 1.2 (Un modelo sencillo del clima)**.** El clima de cada día puede encontrarse en uno de tres estados:

$$1 = \text{soleado}, \qquad 2 = \text{lluvioso}, \qquad 3 = \text{nublado}.$$

Supondremos que la probabilidad del clima de mañana depende únicamente del clima de hoy. Por ejemplo, las probabilidades de transición están dadas por

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Así, si hoy está soleado, mañana estará soleado con probabilidad 0,6, lluvioso con probabilidad 0,2 y nublado con probabilidad 0,2.

El modelo anterior supone que las probabilidades de transición son constantes en el tiempo. En una situación más realista, el clima podría modelarse mediante una cadena de Markov *no homogénea*, en la que las probabilidades de transición dependan del día o de la época del año

$$p_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x).$$

Por ejemplo, las probabilidades de transición podrían ser diferentes durante el verano y el invierno.

Ejemplo 1.3 (Caminata aleatoria en $\mathbb{Z}$)**.** Sea $S = \mathbb{Z}$. En cada paso, una partícula se desplaza una unidad hacia la derecha o hacia la izquierda, ambas con probabilidad $\frac{1}{2}$. Es decir,

$$q(j, j+1) = q(j, j-1) = \frac{1}{2}, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, si $X_n = j$, entonces

$$X_{n+1} = \begin{cases} j+1, & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}, \\ j-1, & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Lema 1.4. *Sea $I \subset [0, 1)$ un intervalo de longitud $\lambda(I) = \ell$ y sea $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ una distribución sobre S. Entonces existen m subintervalos $I_1, \ldots, I_m$ de I tales que*

(1) $I_1 \cup \cdots \cup I_m = I$, *(2)* $I_i \cap I_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$, *(3)* $\lambda(I_i) = \ell\, \nu_i, \quad i = 1, \ldots, m.$

Teorema 1.5 (Existencia de una cadena de Markov)**.** *Sea $S = \{1, \ldots, m\}$ un espacio de estados finito. Sean $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ una distribución y $Q = [q(x, y)]$ una matriz estocástica sobre S. Entonces existe una cadena de Markov homogénea $(X_n)_{n \geq 0}$, definida sobre $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$, con distribución inicial μ y matriz de transición Q.*

Demostración. Para $n \geq 1$, denotemos por $H_n := S \times S^n$ al espacio de *n-historias*, y escribamos $h_n = (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in H_n$ para un elemento típico; convenimos además $H_0 := S$. Como $H_{n+1} = H_n \times S$, cada $(n+1)$-historia se escribe de manera única como

$$h_{n+1} = (h_n, y), \qquad h_n \in H_n,\ y \in S,$$

donde h_n es el prefijo $(i_0, \ldots, i_n)$ de h_{n+1}. Para $x \in S$ denotemos por

$$\nu(x) := (q(x, 1), \ldots, q(x, m))$$

la distribución sobre S dada por las probabilidades de transición desde x.

Construiremos, para cada $n \geq 0$ y cada $h_n = (i_0, \ldots, i_n) \in H_n$, un intervalo $I_{h_n} \subset [0,1)$ tal que

$$\{\omega \in [0,1) \mid X_0(\omega) = i_0, \ldots, X_n(\omega) = i_n\} = I_{h_n} \quad \text{y} \quad \lambda(I_{h_n}) = \mu_{i_0}\, q(i_0, i_1) \cdots q(i_{n-1}, i_n). \tag{2}$$

Paso 1: construcción de X_0. Aplicamos el Lema 1.4 a $I = [0,1)$ y $\nu = \mu$. Obtenemos $I_1, \ldots, I_m$ con $\lambda(I_i) = \mu_i$. Definimos $X_0(\omega) = i$ si $\omega \in I_i$. Entonces

$$\{\omega \in [0,1) \mid X_0(\omega) = i\} = I_i, \qquad \mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda(I_i) = \mu_i,$$

de modo que (2) se cumple para $n = 0$.

Paso 2: paso inductivo. Supongamos que $X_0, \ldots, X_n$ y los intervalos $\{I_{h_n}\}_{h_n \in H_n}$ satisfacen (2). Fijemos $h_n = (i_0, \ldots, i_n) \in H_n$. Si aplicamos el Lema 1.4 al intervalo I_{h_n} y a la distribución $\nu = \nu(i_n)$, entonces obtenemos subintervalos $\{I_{(h_n,y)}\}_{y \in S}$ con

$$\lambda(I_{(h_n,y)}) = \lambda(I_{h_n})\, q(i_n, y), \qquad y \in S.$$

Repitiendo esto para cada $h_n \in H_n$, obtenemos una familia $\{I_{(h_n,y)}\}_{(h_n,y) \in H_{n+1}}$ que particiona $[0,1)$. Definimos $X_{n+1}(\omega) = y$ si y sólo si $\omega \in I_{(h_n,y)}$, para el único $(h_n, y) \in H_n$ tal que $\omega \in I_{(h_n,y)}$. Por construcción, para $h_{n+1} = (h_n, y) = (i_0, \ldots, i_n, y)$,

$$\{\omega \in [0,1) \mid X_0(\omega) = i_0, \ldots, X_n(\omega) = i_n, X_{n+1}(\omega) = y\} = I_{(h_n,y)} = I_{h_{n+1}},$$

y

$$\lambda(I_{h_{n+1}}) = \lambda(I_{h_n})\, q(i_n, y) = \mu_{i_0}\, q(i_0, i_1) \cdots q(i_{n-1}, i_n)\, q(i_n, y),$$

de modo que (2) se cumple para $n+1$. Por el principio de inducción, (2) se cumple para todo $n \geq 0$.

Paso 3: propiedad de Markov. Sea $n \geq 0$ y $h_n = (i_0, \ldots, i_n) \in H_n$ con $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$. Por $(*)$, para cada $j \in S$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n, X_{n+1} = j)}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)} \\
&= \frac{\mu_{i_0}\, q(i_0, i_1) \cdots q(i_{n-1}, i_n)\, q(i_n, j)}{\mu_{i_0}\, q(i_0, i_1) \cdots q(i_{n-1}, i_n)} \\
&= q(i_n, j).
\end{aligned}$$

Es decir, $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0, \ldots, X_n) = q(X_n, j)$. Por consiguiente, $(X_n)_{n \geq 0}$ es una cadena de Markov homogénea con distribución inicial μ y matriz de transición Q.

□

Proposición 1.6 (Distribución conjunta)**.** *El proceso estocástico (X_n) es una CMH, con distribución inicial μ y matriz de transición $Q = [q(x,y)]$, si y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cualesquiera $x_0, \ldots, x_n \in S$*

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \mu(x_0)\, q(x_0, x_1)\, q(x_1, x_2) \cdots q(x_{n-1}, x_n). \tag{3}$$

Demostración. Supongamos primero que (X_n) es una CMH, con distribución inicial μ y matriz de transición $Q = [q(x,y)]$. Procedemos por inducción en n. Para $n = 0$ es $\mathbb{P}[X_0 = x_0] = \mu(x_0)$. Supongamios que (3) se cumple para n y $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] > 0$. Por la propiedad de Markov (1),

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_{n+1} = x_{n+1}] &= \mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n]\, q(x_n, x_{n+1}) \\
&= \mu(x_0) q(x_0, x_1) \cdots q(x_{n-1}, x_n) q(x_n, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = 0$, por la hipótesis de inducción, ambos miembros de (3) son 0 para $n+1$.

Supongamos ahora que se cumple (3). Basta verificar (1) solo cuando $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] > 0$, por lo que es inmediato ver que

$$\frac{\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_{n+1} = x_{n+1}]}{\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n]} = q(x_n, x_{n+1}).$$

Además (3) se reduce a la distribucion inicial de la cadena cuando $n = 0$. □

1.2. Transición en n pasos

Sea $q_n(x, y)$ la entrada (x, y) de la matriz Q^n, con $q_0(x, y) = \delta_{xy}$.

Lema 1.7 (Ecuación de Chapman–Kolmogorov)**.** *Sea (X_n) una CMH con matriz de transición $Q = [q(x, y)]$. Entonces*

$$q_{m+n}(x, y) = \sum_{z \in S} q_m(x, z)\, q_n(z, y)$$

para $x, y \in S$ y $m, n \geq 0$.

Demostración. Se obtiene de la igualdad $Q^{m+n} = Q^m Q^n$. □

Proposición 1.8. *Sea (X_n) una CMH con distribución inicial μ y matriz de transición $Q = [Q(x, y)]$.*

(a) *Si $\mathbb{P}[X_k = x] > 0$, entonces*

$$\mathbb{P}[X_{k+n} = y \mid X_k = x] = q_n(x, y), \qquad n \geq 0.$$

(b) *Si μ_n denota la distribución de X_n, entonces*

$$\mu_n = \mu Q^n.$$

Demostración. (a) Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 0$,

$$\mathbb{P}[X_k = y \mid X_k = x] = \delta_{xy} = q_0(x, y).$$

Supongamos ahora que

$$\mathbb{P}[X_{k+n} = z \mid X_k = x] = q_n(x, z)$$

para $x, z \in S$. Por la ley de la probabilidad total,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_{k+n+1} = y \mid X_k = x] &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}[X_{k+n+1} = y,\ X_{k+n} = z \mid X_k = x] \\
&= \sum_{z \in E} \mathbb{P}[X_{k+n+1} = y \mid X_{k+n} = z, X_k = x] \mathbb{P}[X_{k+n} = z \mid X_k = x] \\
&= \sum_{z \in E} q_n(x, z) q(z, y) \\
&= q_{n+1}(x, y),
\end{aligned}$$

pues $Q^{n+1} = Q^n Q$.

(b) Para $y \in S$, por la ley de la probabilidad total,

$$\begin{aligned}
\mu_n(y) &= \mathbb{P}[X_n = y] \\
&= \sum_{x \in E} \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] \mathbb{P}[X_0 = x] \\
&= \sum_{x \in E} \mu(x) q_n(x, y).
\end{aligned}$$

Es decir, $\mu_n(y)$ es igual al producto de μ por la columna y de Q^n, por lo tanto $\mu_n = \mu Q^n$. □

1.3. Filtraciones y tiempos de paro

Dada una $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}$, decimos que la familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ (de sub–$\sigma-$álgebras de $\mathcal{F}$) es una **filtración** si

$$s \leq t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Cuando tenemos una sucesión (X_n) de variables aleatorias, su **filtración natural** es

$$\mathcal{F}_n := \sigma\{X_0, \ldots, X_n\}. \tag{4}$$

Intuitivamente, para decidir si un evento está o no en $\mathcal{F}_n$, sólo se necesita la *información* de $X_0, \ldots, X_n$.

Definición 1.9. Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La variable aleatoria $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ es un **tiempo de paro**, con respecto a (4), si

$$[T = n] := \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Observación 1.10. Dada una función $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, puede probarse la siguiente equivalencia: existe una función medible $\varphi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \{0, 1\}$ tal que

$$\mathbf{1}_{[T=n]} = \varphi_n(X_0, X_1, \ldots, X_n),$$

si y sólo si T es un tiempo de paro con respecto a la filtración natural de (X_n).

Ejemplo 1.11. Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias con su filtración natural. Si $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces el **tiempo de primera entrada** (o primera visita) a B

$$T_B = \text{mín}\{j \mid X_j \in B\}$$

es un tiempo de paro. En efecto,

$$[T = n] = \{\omega \in \Omega \mid X_0(\omega) \notin B, \ldots, X_{n-1}(\omega) \notin B,\ X_n(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_n,$$

ya que $[X_k \in B]$ pertenece a $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$, $k \leq n$.

2. Clasificación de estados

Definición 2.1. Sea (X_n) una CMH con espacio de estados S. Un estado $x \in S$ es **recurrente** (o **persistente**) si

$$\mathbb{P}[X_n = x \text{ para algún } n \geq 1 \mid X_0 = x] = 1,$$

es decir, si la probabilidad de regresar eventualmente a x es 1. Si esta probabilidad es estrictamente menor que 1, el estado x se llama **transitorio**.

Consideremos la **probabilidad de primera visita** al estado $j \in S$ en n pasos. Para $n \geq 1$, sea

$$\begin{aligned} f_n(i,j) &:= \mathbb{P}[X_1 \neq j,\ X_2 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j,\ X_n = j \mid X_0 = i] \\ &= \mathbb{P}[T_j = n \mid X_0 = i], \end{aligned} \tag{5}$$

es decir, la probabilidad de que la primera visita al estado j ocurra en el n-ésimo paso, partiendo de i. Aunque $f_n(i,j)$ está definida sólo para $n \geq 1$, en ocasiones es útil la convención $f_0(i,j) = 0$. Definimos la probabilidad de que la cadena visite alguna vez el estado j, partiendo de i,

$$f(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i,j). \tag{6}$$

Observe que j es recurrente si y sólo si $f(j,j) = 1$.

Lema 2.2 (Descomposición por primera visita)**.** *Sean $i, j \in S$ y $m \geq 1$. Entonces*

$$q_m(i,j) = \sum_{k=1}^{m} f_k(i,j)\, q_{m-k}(j,j).$$

Más aún,

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m(i,j) = f(i,j) \sum_{r=0}^{\infty} q_r(j,j).$$

Demostración. Notemos que si $X_m(\omega) = j$, entonces

$$T_j(\omega) = \min\{r \geq 1 \mid X_r(\omega) = j\} \leq m,$$

es decir, $\omega \in [T_j = k]$ para algún $k \leq m$. Por lo tanto,

$$[X_m = j] \subseteq \bigsqcup_{k=1}^{m} [T_j = k],$$

donde la unión es disjunta. Luego

$$\begin{aligned} q_m(i,j) &= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(X_m = j,\ T_j = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(X_m = j \mid T_j = k,\ X_0 = i)\, \mathbb{P}(T_j = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} q_{m-k}(j,j)\, f_k(i,j). \end{aligned}$$

En el caso $k = m$ se obtiene $q_0(j,j) = \mathbb{P}(X_m = j \mid X_m = j) = 1$.

Para la segunda igualdad, sumamos sobre $m \geq 1$. Como todos los términos son no negativos, podemos intercambiar el orden de las sumas

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} q_m(i,j) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} f_k(i,j)\, q_{m-k}(j,j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} f_k(i,j) q_{m-k}(j,j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} f_k(i,j) q_r(j,j) \\ &= f(i,j) \sum_{r=0}^{\infty} q_r(j,j). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3 (Criterio de recurrencia)**.** *El estado j es recurrente si y sólo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(j,j) = \infty.$$

Si j es recurrente e $i \in S$ satisface $f(i,j) > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(i,j) = \infty$.

Demostración. Escribamos $f = f(j,j)$, $f_r = f_r(j,j)$,

$$S_M = \sum_{m=1}^{M} q_m(j,j), \qquad S = \lim_{M\to\infty} S_M.$$

Supongamos primero que j es recurrente, es decir, $f = 1$. Si fuera $S < \infty$, el Lema 2.2 daría

$$S = f\,(1+S) = 1 + S,$$

lo cual es imposible. Por lo tanto $S = \infty$.

Recíprocamente, supongamos que j no es recurrente, $f < 1$, y veamos que $S < \infty$. Por el Lema 2.2,

$$\begin{aligned} S_M &= \sum_{m=1}^{M} q_m(j,j) \\ &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{r=1}^{m} f_r\, q_{m-r}(j,j) \\ &= \sum_{r=1}^{M}\sum_{m=r}^{M} f_r\, q_{m-r}(j,j) \\ &= \sum_{r=1}^{M} f_r \sum_{k=0}^{M-r} q_k(j,j) \\ &\le f\,(1+S_M). \end{aligned}$$

De la última desigualdad tenemos que $S_M \le f/(1-f)$ para todo M, por lo que $S < \infty$. Esto prueba que si $S = \infty$, entonces j es recurrente.

Para demostrar la segunda afirmación, supongamos que j es recurrente y $f(x,y) > 0$. Entonces $\sum_{k\ge 0} q_k(j,j) = 1 + S = \infty$ y, por el Lema 2.2,

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m(i,j) = f(i,j)\sum_{k=0}^{\infty} p_k(j,j) = \infty.$$

□

Corolario 2.4 (Estados transitorios)**.** *El estado j es transitorio si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(j,j) < \infty$; en tal caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(j,j) = \frac{f(j,j)}{1-f(j,j)}.$$

Si j es transitorio, entonces para todo $i \in S$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(i,j) = \frac{f(i,j)}{1-f(j,j)} < \infty;$$

en particular, $q_n(i,j) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Escribamos $f = f(j,j)$ y $S = \sum_{n\ge 1} q_n(j,j)$.

Por el Teorema 2.3, si j es transitorio, entonces $f < 1$ y $S < \infty$. Usando el Lema 2.2, tenemos $S = f\,(1+S)$ de donde $S = f/(1-f)$.

Sea $i \in S$ y supongamos que j es transitorio. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(j,j) = 1 + \frac{f}{1-f} = \frac{1}{1-f},$$

y por el Lema 2.2,

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m(i,j) = \frac{f(i,j)}{1-f} < \infty.$$

□

Definición 2.5 (Comunicación)**.** Decimos que el estado x **se comunica con** el estado y, escribimos $x \to y$, si $q_m(x,y) > 0$ para algún $m \geq 0$. Decimos que x e y *se intercomunican*, escribimos $x \leftrightarrow y$, si $x \to y$ y $y \to x$.

Notemos que siempre se cumple $x \to x$, pues $q_0(x,x) = 1$. Si $x \neq y$, entonces $x \to y$ si y sólo si $f(x,y) > 0$.

Proposición 2.6. *La relación $\leftrightarrow$ es una relación de equivalencia en S.*

Demostración. La reflexividad se sigue de $q_0(x,x) = 1$ y la simetría es inmediata de la definición. Para la transitividad, supongamos que $q_m(x,y) > 0$ y $q_k(y,z) > 0$. Por la ecuación de Chapman–Kolmogorov,

$$q_{m+k}(x,z) = \sum_{w \in S} q_m(x,w)\, q_k(w,z) \;\geq\; q_m(x,y)\, q_k(y,z) > 0.$$

Así, $x \to y$ y $y \to z$ implican $x \to z$; aplicando esto en ambos sentidos se obtiene la transitividad de $\leftrightarrow$. □

Por lo tanto S se parte en **clases comunicantes**, que son las clases de equivalencia de $\leftrightarrow$.

Definición 2.7 (Conjuntos cerrados e irreducibles)**.** Sea $C \subseteq S$.

(a) C es **cerrado** si $q(x,y) = 0$ para cualesquiera $x \in C$ y $y \notin C$.

(b) C es **irreducible** si $x \leftrightarrow y$ para cualesquiera $x, y \in C$.

(c) Un subconjunto cerrado de la forma $\{x\}$ se llama **absorbente**, es decir, $q(x,x) = 1$.

Si S es irreducible, decimos que la cadena es irreducible.

Notemos que, una vez que la cadena entra en un conjunto cerrado C, ya no sale de él. Además, cada clase comunicante es un conjunto irreducible.

Definición 2.8 (Período)**.** Sea $x \in S$ tal que $q_n(x,x) > 0$ para algún $n \geq 1$. El **período** de $x \in S$ es

$$d(x) = \text{mcd}\{n \geq 1 : q_n(x,x) > 0\}.$$

El estado x es **periódico** si $d(x) > 1$ y **aperiódico** si $d(x) = 1$.

Ejemplo 2.9 (Ciclo determinista, $d = 3$)**.** Sea $S = \{1,2,3\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es decir, la cadena recorre $1 \to 2 \to 3 \to 1 \to \cdots$. Partiendo de 1, sólo se regresa en los tiempos $3, 6, 9, \ldots$, así que $q_n(1,1) > 0$ si y sólo si $3 \mid n$ y

$$d(1) = \text{mcd}\{3, 6, 9, \ldots\} = 3.$$

Dado que los tres estados se comunican, como veremos en el Teorema 2.12(a), $d(1) = d(2) = d(3) = 3$.

Si ahora se cambia la primera fila a $q(1,1) = \frac{1}{2}$, $q(1,2) = \frac{1}{2}$, entonces $q_1(1,1) > 0$, luego $d(1) = 1$ y, nuevamente por el Teorema 2.12(a), los tres estados son aperiódicos. Basta una sola modificación en un estado para cambiar el periodo de toda la clase.

Ejemplo 2.10 (Caminata aleatoria en $\mathbb{Z}$, $d = 2$)**.** En el Ejemplo 1.3 (con $q(j, j+1) = q(j, j-1) = \frac{1}{2}$), para regresar a 0 se necesitan tantos pasos a la derecha como a la izquierda, por lo que el número de pasos es par:

$$q_n(0,0) = 0 \ \text{ si } n \text{ es impar}, \qquad q_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} > 0. \tag{7}$$

Entonces $d(0) = \text{mcd}\{2, 4, 6, \dots\} = 2$. Como $\mathbb{Z}$ es una sola clase de comunicación, todos los estados tienen periodo 2. Lo mismo ocurre con las urnas de Ehrenfest (Ejercicio 3.1): en cada paso X_n cambia en ± 1, así que sólo se puede regresar a un estado en un número par de pasos.

Ejemplo 2.11 (Aperiódico con $q(x, x) = 0$)**.** Sea $S = \{1, 2, 3\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Partiendo de 1 se puede regresar en dos pasos ($1 \to 2 \to 1$, con probabilidad $\frac{1}{2}$) o en tres ($1 \to 2 \to 3 \to 1$, con probabilidad $\frac{1}{2}$), así que $q_2(1,1) > 0$ y $q_3(1,1) > 0$. Por lo tanto

$$d(1) = \text{mcd}\{2, 3, \dots\} = 1.$$

El estado 1 es aperiódico aunque $q(1,1) = 0$. Esto muestra que $q(x,x) > 0$ es una condición suficiente para que x sea aperiódico, pero no necesaria, y que el periodo no es el menor tiempo de retorno posible (aquí el menor es 2).

Teorema 2.12 (Propiedades de clase)**.** *Si $i \leftrightarrow j$, entonces*

(a) *i y j tienen el mismo periodo;*

(b) *i es transitorio si y sólo si j es transitorio;*

(c) *i es recurrente si y sólo si j es recurrente.*

Demostración. Si $i = j$, las tres afirmaciones son inmediatas. Supongamos $i \neq j$. Como $i \leftrightarrow j$, existen $m, k \geq 1$ tales que

$$\alpha := q_m(i,j)\, q_k(j,i) > 0.$$

Por la ecuación de Chapman–Kolmogorov, para todo $r \geq 0$,

$$q_{m+r+k}(i,i) \ \geq \ q_m(i,j)\, q_r(j,j)\, q_k(j,i) = \alpha\, q_r(j,j) \tag{8}$$

y

$$q_{k+r+m}(j,j) \ \geq \ q_k(j,i)\, q_r(i,i)\, q_m(i,j) = \alpha\, q_r(i,i). \tag{9}$$

(a) Tomando $r = 0$ en (8) y en (9) se tiene $q_{m+k}(i,i) > 0$ y $q_{m+k}(j,j) > 0$; en particular, $d(i)$ y $d(j)$ están bien definidos y $d(i)$ divide a $m + k$. Sea $r \geq 1$ con $q_r(j,j) > 0$. Por (8), $q_{m+r+k}(i,i) > 0$, de modo que $d(i)$ divide a $m + r + k$ y, como también divide a $m + k$, divide a r. Así $d(i)$ es un divisor común de $\{r \geq 1 : q_r(j,j) > 0\}$, y por lo tanto $d(i)$ divide a $d(j)$. Intercambiando los papeles de i y j, se obtiene que $d(j)$ divide a $d(i)$. Luego $d(i) = d(j)$.

(b) Supongamos que i es transitorio. Por el Corolario 2.4, $\sum_{n\geq 1} q_n(i,i) < \infty$. Sumando (8) sobre $r \geq 1$,

$$\alpha \sum_{r\geq 1} q_r(j,j) \ \leq \ \sum_{r\geq 1} q_{m+r+k}(i,i) \ \leq \ \sum_{n\geq 1} q_n(i,i) < \infty.$$

Como $\alpha > 0$, se tiene $\sum_{r\geq 1} q_r(j,j) < \infty$. Por el Corolario 2.4, j es transitorio. La implicación recíproca es análoga, usando (9) en lugar de (8).

(c) Cada estado es recurrente o transitorio (no se cumplen simultáneamente ambas propiedades). Entonces la afirmación se sigue de (b). □

Por el Teorema 2.12, ser recurrente, ser transitorio y tener un periodo dado son propiedades de clase. Tiene sentido hablar de una clase recurrente, transitoria o aperiódica, y de una cadena irreducible recurrente.

Teorema 2.13 (Teorema de descomposición)**.** *El espacio de estados se parte de manera única como*

$$S = T \ \cup \ C_1 \ \cup \ C_2 \ \cup \cdots,$$

donde T es el conjunto de estados transitorios y cada C_i es un conjunto irreducible y cerrado de estados recurrentes.

Demostración. Por la Proposición 2.6, $\leftrightarrow$ es una relación de equivalencia en S, de modo que S se parte en clases comunicantes. Por el Teorema 2.12(b) y (c), los estados de una misma clase son todos recurrentes o todos transitorios. Sean $C_1, C_2, \ldots$ las clases recurrentes y sea T la unión de las clases transitorias, que es el conjunto de estados transitorios. Entonces $S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots$ es una unión disjunta, y cada C_i es irreducible por ser una clase comunicante.

Veamos que cada C_i es cerrado. Sean $x \in C_i$, $y \notin C_i$ (en particular $y \neq x$) y supongamos que $q(x, y) > 0$. Como $y \notin C_i$, no se cumple $y \to x$ (de lo contrario $x \leftrightarrow y$ y $y \in C_i$). Es decir, $q_k(y, x) = 0$ para todo $k \geq 0$. Escribamos $P_x = P[\,\cdot \mid X_0 = x]$, $A = [X_1 = y]$ y

$$B = [X_n = x \text{ para algún } n \geq 1].$$

Como $y \neq x$, el evento $A \cap B$ está contenido en la unión de los eventos $[X_1 = y, \ X_k = x]$, $k \geq 2$, por lo tanto

$$P_x(A \cap B) \ \leq \ \sum_{k \geq 2} P_x[X_1 = y, \ X_k = x] = \sum_{k \geq 2} q(x, y)\, q_{k-1}(y, x) = 0.$$

Entonces $P_x(A) + P_x(B) \leq 1$ y como $P_x(A) = q(x, y)$,

$$P_x(B) \ \leq \ 1 - q(x, y) \ < \ 1.$$

Esto contradice que x sea recurrente. Por lo tanto C_i es cerrado.

Unicidad. Sea $S = T \cup C_1' \cup C_2' \cup \cdots$ otra partición con las mismas propiedades. Cada C_j' es irreducible y está formado por estados recurrentes, por lo que está contenido en una clase comunicante recurrente C. Como C_j' es cerrado y desde sus estados se alcanza todo C, se tiene $C_j' = C$.

Además, los C_j' cubren todos los estados recurrentes y dos clases comunicantes con un estado en común coinciden. Por tanto, los C_j' son exactamente las clases recurrentes, y ambas particiones tienen los mismos bloques.

□

A partir del Teorema de descomposición, tenemos las siguientes observaciones. Si $X_0 \in C_i$, la cadena nunca sale de C_i y podemos tomar C_i como el espacio de estados. Si $X_0 \in T$, la cadena permanece en T para siempre o termina atrapada en algún C_i.

Proposición 2.14. *Si S es finito, entonces para todo $x \in S$,*

$$P[X_n \in T \text{ para todo } n \geq 0 \mid X_0 = x] = 0,$$

es decir, la cadena no permanece en T para siempre. En particular, al menos un estado es recurrente.

Demostración. Sea $x \in S$. Por el Corolario 2.4, $q_n(x,y) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $y \in T$. Como T es finito,

$$P[X_n \in T \mid X_0 = x] = \sum_{y \in T} q_n(x,y) \;\longrightarrow\; 0.$$

Entonces, para cada $n \geq 0$,

$$P[X_k \in T \text{ para todo } k \geq 0 \mid X_0 = x] \;\leq\; P[X_n \in T \mid X_0 = x],$$

y haciendo $n \to \infty$ el lado izquierdo es 0.

Si todos los estados fueran transitorios, se tendría $T = S$ y $P[X_n \in T \mid X_0 = x] = 1$ para todo n, lo cual contradice que ese número tienda a 0. Por lo tanto, al menos un estado es recurrente. □

Ejemplo 2.15. Sea $S = \{1,2,3,4,5\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Clases comunicantes. Se tiene $1 \leftrightarrow 2$, pues $q(1,2) > 0$ y $q(2,1) > 0$. El estado 3 es absorbente. Desde 4 se llega a 1, 3 y 5, pero desde ninguno de ellos se regresa a 4; y desde 5 se llega a 3, pero no se regresa a 5 una vez que se sale. Por lo tanto las clases comunicantes son

$$\{1,2\}, \qquad \{3\}, \qquad \{4\}, \qquad \{5\}.$$

Estados recurrentes. Los conjuntos $\{1,2\}$ y $\{3\}$ son cerrados: las filas 1 y 2 tienen entradas nulas fuera de $\{1,2\}$, y $q(3,3) = 1$. Restringida a $\{1,2\}$, la cadena es finita e irreducible, así que por la Proposición 2.14 tiene un estado recurrente, y por el Teorema 2.12 todos lo son. El estado 3 es recurrente porque $f(3,3) = q(3,3) = 1$.

Estados transitorios. Desde 4 la cadena puede pasar a 1, 3 o 5 y no regresar nunca, de modo que $f(4,4) = q(4,4) = \frac{1}{4} < 1$. Análogamente, $f(5,5) = q(5,5) = \frac{1}{2} < 1$. Como verificación, por el Corolario 2.4,

$$\sum_{n \geq 1} q_n(4,4) = \sum_{n \geq 1} \left(\tfrac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3} = \frac{f(4,4)}{1 - f(4,4)}, \qquad \sum_{n \geq 1} q_n(5,5) = \sum_{n \geq 1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1 = \frac{f(5,5)}{1 - f(5,5)}.$$

Descomposición. Así,

$$S = T \cup C_1 \cup C_2, \qquad T = \{4,5\}, \quad C_1 = \{1,2\}, \quad C_2 = \{3\},$$

donde C_1 y C_2 son irreducibles, cerrados y recurrentes. Observemos que T no es irreducible, sino unión de dos clases transitorias, y que no es cerrado, pues desde 4 y 5 la cadena puede salir de T.

Comportamiento de la cadena. Si $X_0 \in C_1$ o $X_0 \in C_2$, la cadena permanece ahí para siempre. Si $X_0 \in T$, por la Proposición 2.14 la cadena sale de T casi seguramente y queda atrapada en C_1 o en C_2. Por ejemplo, desde 4: en cada paso se permanece, se va a 1, a 3 o a 5, cada uno con probabilidad $\frac{1}{4}$, y desde 5 se termina en 3 con probabilidad 1. Entonces

$$P[\text{terminar en } C_1 \mid X_0 = 4] = \tfrac{1}{3}, \qquad P[\text{terminar en } C_2 \mid X_0 = 4] = \tfrac{2}{3}.$$

3. Comportamiento asintótico

En esta sección, S es un conjunto *finito*, las distribuciones sobre S se consideran como vectores fila, de modo que μQ es el producto de un vector fila por la matriz Q.

3.1. Distribución estacionaria

Definición 3.1 (Distribución estacionaria)**.** Una distribución π sobre S es *estacionaria* (o *invariante*) para la matriz de transición Q si

$$\pi = \pi Q, \qquad \text{es decir,} \qquad \pi(y) = \sum_{x \in S} \pi(x)\, q(x,y) \quad \text{para todo } y \in S.$$

Observación 3.2. Si π es estacionaria, entonces $\pi Q^n = \pi$ para todo $n \geq 0$, por inducción. Por la Proposición 1.8(b), si X_0 tiene distribución π, entonces X_n tiene distribución $\pi Q^n = \pi$ para todo $n \geq 0$: la distribución de la cadena no cambia con el tiempo. Equivalentemente, π es un vector propio izquierdo de Q asociado al valor propio 1, cuyas entradas son no negativas y suman 1.

Teorema 3.3 (Existencia)**.** *Si S es finito, toda matriz estocástica Q sobre S tiene al menos una distribución estacionaria.*

Demostración. Sea μ una distribución cualquiera sobre S y, para $N \geq 1$, sea

$$\nu_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu Q^n.$$

Por el Ejercicio 4.4, cada μQ^n es una distribución, y por lo tanto ν_N, que es un promedio de distribuciones, también lo es. El conjunto de distribuciones sobre S es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^S$, luego compacto, porque S es finito. Entonces existe una subsucesión $(\nu_{N_k})_{k \geq 1}$ que converge a una distribución π.

Veamos que $\pi Q = \pi$. Como

$$\nu_N Q - \nu_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu Q^n - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu Q^n = \frac{1}{N}(\mu Q^N - \mu),$$

y μQ^N y μ son distribuciones, se tiene

$$\sum_{y \in S} \big|(\nu_N Q - \nu_N)(y)\big| \;\leq\; \frac{2}{N} \;\longrightarrow\; 0.$$

Como el producto por Q es continuo (es una aplicación lineal en dimensión finita), tomando $N = N_k$ y $k \to \infty$ resulta $\pi Q - \pi = 0$. □

Segunda prueba del Teorema 3.3. Sea

$$\Delta = \Big\{ \mu \in \mathbb{R}^S : \; \mu(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in S, \; \sum_{x \in S} \mu(x) = 1 \Big\}$$

el conjunto de distribuciones sobre S. Como S es finito, Δ es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^{|S|}$. Definimos

$$f : \Delta \to \Delta, \qquad f(\mu) = \mu Q.$$

Por el Ejercicio 4.4, $\mu Q \in \Delta$ siempre que $\mu \in \Delta$, de modo que f está bien definida, y es continua porque es lineal en dimensión finita. Por el teorema de punto fijo de Brouwer, existe $\pi \in \Delta$ tal que $f(\pi) = \pi$, es decir, $\pi Q = \pi$. □

Ejemplo 3.4 (Cadena de dos estados)**.** Sea $S = \{1, 2\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}, \qquad a, b \in [0, 1].$$

Buscamos $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ con $\pi Q = \pi$, $\pi_1, \pi_2 \geq 0$ y $\pi_1 + \pi_2 = 1$. La ecuación $\pi Q = \pi$ equivale a

$$\pi_1 = (1-a)\pi_1 + b\pi_2, \qquad \pi_2 = a\pi_1 + (1-b)\pi_2,$$

y ambas se reducen a la misma:

$$a\,\pi_1 = b\,\pi_2. \tag{10}$$

Distinguimos dos casos.

Caso $a + b > 0$. Sustituyendo $\pi_2 = 1 - \pi_1$ en (10), $a\pi_1 = b(1 - \pi_1)$, de donde

$$\pi = \Big(\frac{b}{a+b},\ \frac{a}{a+b}\Big),$$

y es la única distribución estacionaria.

Caso $a = b = 0$. Entonces $Q = I$, y toda distribución sobre S es estacionaria: la cadena nunca se mueve, y la distribución estacionaria no es única.

Interpretación. En el caso $a + b > 0$, la ecuación (10) dice que, bajo π, la probabilidad de pasar de 1 a 2 en un paso, $\pi_1 a$, es igual a la de pasar de 2 a 1, $\pi_2 b$. Casos particulares:

- Si $a = b$, entonces $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- Si $a = 0 < b$, el estado 1 es absorbente, el estado 2 es transitorio y $\pi = (1, 0)$.
- Si $a = b = 1$, la cadena alterna $1, 2, 1, 2, \ldots$, tiene periodo 2 y $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Lema 3.5 (Positividad)**.** *Sea Q irreducible y sea $w \in \mathbb{R}^S$ un vector fila con $w(x) \geq 0$ para todo $x \in S$, $w \neq 0$ y $wQ = w$. Entonces $w(y) > 0$ para todo $y \in S$.*

Demostración. Por inducción, $wQ^n = w$ para todo $n \geq 0$. Como $w \neq 0$, existe $x \in S$ con $w(x) > 0$. Sea $y \in S$. Por irreducibilidad, $x \to y$, es decir, existe $n \geq 0$ con $q_n(x, y) > 0$. Como todos los términos son no negativos,

$$w(y) = \sum_{z \in S} w(z)\, q_n(z, y) \ \geq\ w(x)\, q_n(x, y) > 0. \qquad \square$$

Teorema 3.6 (Unicidad)**.** *Sea S finito y sea (X_n) una cadena irreducible con matriz de transición Q. Entonces existe una única distribución estacionaria π con $\pi(x) > 0$ para todo $x \in S$.*

Demostración. La existencia es el Teorema 3.3. Por el Lema 3.5, toda distribución estacionaria es estrictamente positiva.

Sean π y π' distribuciones estacionarias. Como $\pi'(x) > 0$ para todo $x \in S$ y S es finito, existe

$$c = \min_{x \in S} \frac{\pi(x)}{\pi'(x)} > 0,$$

alcanzado en algún $x_0 \in S$. Sea $w = \pi - c\,\pi'$. Entonces $w \geq 0$, $wQ = w$ y $w(x_0) = 0$. Si $w \neq 0$, el Lema 3.5 daría $w(x_0) > 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $w = 0$, es decir, $\pi = c\,\pi'$, y sumando sobre $x \in S$ se obtiene $1 = c$. Así, $\pi = \pi'$. $\square$

Observación 3.7. La prueba no usa la recurrencia de los estados, y la finitud de S se usa sólo para la existencia. Sin embargo, por la Proposición 2.14 y el Teorema 2.12, una cadena irreducible y finita tiene todos sus estados recurrentes.

Proposición 3.8. *Si π es una distribución estacionaria y $x \in T$, entonces $\pi(x) = 0$.*

Demostración. Como $\pi Q^n = \pi$, para todo $n \geq 0$,

$$\pi(x) = \sum_{y \in S} \pi(y)\, q_n(y, x).$$

Por el Corolario 2.4, $q_n(y, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $y \in S$. Como S es finito, podemos pasar el límite dentro de la suma, y resulta $\pi(x) = 0$. □

Observación 3.9. Sea $S = T \cup C_1 \cup \cdots \cup C_r$ la descomposición del Teorema 2.13. Como cada C_i es cerrado, la restricción $Q_i = [q(x, y)]_{x,y \in C_i}$ es una matriz estocástica sobre C_i, y es irreducible. Por el Teorema 3.6, Q_i tiene una única distribución estacionaria $\hat{\pi}_i$, estrictamente positiva. Si π_i denota su extensión por cero a S, entonces π_i es una distribución estacionaria para Q.

Junto con la Proposición 3.8, que asegura que toda estacionaria se anula en T, se obtiene que las distribuciones estacionarias de Q son exactamente las combinaciones convexas

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} c_i\, \pi_i, \qquad c_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{r} c_i = 1,$$

con $c_i = \sum_{x \in C_i} \pi(x)$. En particular, hay una distribución estacionaria por cada clase recurrente, y es única si y sólo si $r = 1$, es decir, si hay una sola clase recurrente. Una cadena irreducible es el caso $r = 1$ y $T = \emptyset$.

Por ejemplo, para la cadena del Ejemplo 2.15 se tiene $T = \{4, 5\}$, $C_1 = \{1, 2\}$ y $C_2 = \{3\}$, de modo que $r = 2$ y las distribuciones estacionarias forman la familia $\lambda\pi_1 + (1-\lambda)\pi_2$, $\lambda \in [0, 1]$, con $\pi_1 = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, 0)$ y $\pi_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$.

3.2. Teoremas límite

Sea S finito. Para un vector fila $w \in \mathbb{R}^S$ escribimos $\|w\|_1 = \sum_{y \in S} |w(y)|$.

Lema 3.10 (Contracción)**.** *Sea P una matriz estocástica sobre S y sea*

$$\varepsilon = \sum_{y \in S} \min_{x \in S} P(x, y) \in [0, 1].$$

Entonces, para todo vector fila $v \in \mathbb{R}^S$ con $\sum_x v(x) = 0$,

$$\|vP\|_1 \;\leq\; (1 - \varepsilon)\, \|v\|_1.$$

Demostración. Sea $m(y) = \min_x P(x, y)$. Como $\sum_x v(x) = 0$,

$$(vP)(y) = \sum_x v(x)\big(P(x, y) - m(y)\big),$$

y como $P(x, y) - m(y) \geq 0$,

$$\|vP\|_1 \leq \sum_y \sum_x |v(x)|\big(P(x, y) - m(y)\big) = \sum_x |v(x)|\,(1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)\|v\|_1.$$

Aquí se usó $\sum_y P(x, y) = 1$ y $\sum_y m(y) = \varepsilon$. Finalmente, $\varepsilon \leq \sum_y P(x_0, y) = 1$ para cualquier x_0. □

Teorema 3.11 (Convergencia a la distribución estacionaria)**.** *Sea S finito y sea Q una matriz estocástica sobre S. Supongamos que existe $N \geq 1$ tal que*

$$q_N(x, y) > 0 \qquad \text{para todos } x, y \in S.$$

Entonces existe una única distribución estacionaria π, y $\pi(y) > 0$ para todo $y \in S$. Además, con $\varepsilon = \sum_y \min_x q_N(x, y) > 0$, para toda distribución inicial μ y todo $n \geq 0$,

$$\|\mu Q^n - \pi\|_1 \;\leq\; 2\,(1 - \varepsilon)^{\lfloor n/N \rfloor}.$$

En particular, $\mu Q^n \to \pi$ y $q_n(x, y) \to \pi(y)$ para todos $x, y \in S$.

Demostración. Como $q_N(x,y) > 0$, se tiene $\min_x q_N(x,y) > 0$ para cada y, de modo que $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 3.3, existe una distribución estacionaria π.

Cota. Sea μ una distribución y $v = \mu - \pi$; entonces $\sum_x v(x) = 0$, $\|v\|_1 \le 2$ y $vQ^n = \mu Q^n - \pi$. Dado n, escribimos $n = kN + r$ con $0 \le r < N$. El vector vQ^r también tiene suma cero, pues $\sum_y (vQ^r)(y) = \sum_x v(x) = 0$. Aplicando k veces el Lema 3.10 con $P = Q^N$, y recordando que Q^r no aumenta la norma $\|\cdot\|_1$ de un vector de suma cero (es el caso $\varepsilon \ge 0$ del mismo lema),

$$\|vQ^n\|_1 = \|(vQ^r)(Q^N)^k\|_1 \;\le\; (1-\varepsilon)^k \, \|vQ^r\|_1 \;\le\; (1-\varepsilon)^k \, \|v\|_1 \;\le\; 2(1-\varepsilon)^k.$$

Como $\lfloor n/N \rfloor = k$ y $0 \le 1 - \varepsilon < 1$, esto es la cota y su límite es 0. Tomando μ concentrada en x resulta $q_n(x,y) \to \pi(y)$.

Unicidad. Si π' es otra distribución estacionaria, tomando $\mu = \pi'$ se tiene $\pi' = \pi' Q^n \to \pi$, luego $\pi' = \pi$.

Positividad. Como $\pi = \pi Q^N$, para cada $y \in S$,

$$\pi(y) = \sum_x \pi(x)\, q_N(x,y) \;\ge\; \min_x q_N(x,y) \sum_x \pi(x) > 0. \qquad \square$$

Ejemplo 3.12 (Cadena de dos estados)**.** En el Ejemplo 3.4, con $\lambda = 1 - a - b$ se verifica por inducción que

$$Q^n = \Pi + \lambda^n (I - \Pi), \qquad \Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix},$$

donde se usan $\Pi Q = Q\Pi = \Pi$ y $\Pi^2 = \Pi$. Por lo tanto $Q^n \to \Pi$ si y sólo si $|\lambda| < 1$, es decir, salvo $a = b = 0$ y $a = b = 1$. Si $0 < a, b < 1$, todas las entradas de Q son positivas y el Teorema 3.11 se aplica con $N = 1$ y $\varepsilon = \min(1-a, b) + \min(a, 1-b)$. Del mismo modo, el modelo del clima del Ejemplo 1.2 cumple la hipótesis con $N = 1$, y la distribución del clima converge a $\pi = (\frac{8}{21}, \frac{7}{21}, \frac{6}{21})$.

Observación 3.13 (Sobre la hipótesis)*.* Sea S finito. La hipótesis del Teorema 3.11, que alguna potencia Q^N tenga todas sus entradas positivas, se cumple en los casos siguientes.

(a) Si todas las entradas de Q son positivas ($N = 1$).

(b) Si la cadena es irreducible y aperiódica, es decir, irreducible y $d(x) = 1$ para algún (y por el Teorema 2.12(a), para todo) $x \in S$. Esta implicación es un hecho estándar que no se demuestra aquí; véase [3, Ejercicio 6.3.9]. Por ejemplo, una cadena irreducible con $q(x,x) > 0$ para algún x es aperiódica.

La prueba del teorema sólo usa que $\varepsilon > 0$, es decir, que alguna columna de Q^N sea estrictamente positiva, y esto es más débil. Por ejemplo, para $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la columna 2 es positiva, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, y por lo tanto la conclusión del teorema se cumple con la única distribución estacionaria $\pi = (0,1)$: $q_n(x,y) \to \pi(y)$ para todos $x, y \in S$. Sin embargo, la cadena no es irreducible, pues el estado 1 es transitorio.

Si la cadena es periódica, $q_n(x,y)$ puede no converger: con $a = b = 1$, la cadena alterna $1, 2, 1, 2, \ldots$ y $q_n(1,1) = 1, 0, 1, 0, \ldots$. Sin embargo, los promedios sí convergen.

Teorema 3.14 (Promedios de Cesàro)**.** *Sea S finito y (X_n) una cadena irreducible, con distribución estacionaria π. Entonces, para $x, y \in S$,*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q_n(x,y) \;\longrightarrow\; \pi(y) \qquad (N \to \infty).$$

Demostración. Sea μ la distribución concentrada en x y $\nu_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mu Q^n$, que es una distribución. Como $\nu_N Q - \nu_N = \frac{1}{N}(\mu Q^N - \mu)$ tiene norma $\|\cdot\|_1$ a lo más $2/N$, todo punto límite de (ν_N) es una distribución estacionaria, y por el Teorema 3.6 es π. El conjunto de distribuciones es compacto, de modo que toda subsucesión de (ν_N) tiene a su vez una subsucesión convergente, y su límite es π. Por lo tanto, $\nu_N \to \pi$. □

Observación 3.15. La irreducibilidad es necesaria en el Teorema 3.14: si hay más de una clase recurrente, el límite de $q_n(x, y)$, cuando existe, depende de x. Por ejemplo, si x y y están en clases recurrentes distintas, $q_n(x, y) = 0$ para todo n, aunque $\pi(y) > 0$ para alguna estacionaria.

3.3. Ley de los grandes números

Sea (X_n) una cadena irreducible con espacio de estados S finito y matriz de transición Q. Para $x \in S$ y $n \geq 1$ sean

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[X_k = x]}, \qquad \bar{V}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_k = x]},$$

el número de visitas a x antes del tiempo n y hasta el tiempo n, respectivamente; entonces $|V_n(x) - \bar{V}_n(x)| \leq 1$. Escribimos $P_i = P[\,\cdot \mid X_0 = i]$ y E_i para su esperanza. Como en la Sección 2, T_x es el tiempo de primera visita a x y

$$f_n(i, x) = P_i[T_x = n]$$

es la probabilidad (5) de primera visita a x en n pasos.

Lema 3.16 (Colas geométricas)**.** *Sea S finito, la cadena irreducible, $x \in S$ y $s = |S|$. Existe $\delta \in (0, 1]$ tal que, para todo $i \in S$ y todo $k \geq 0$,*

$$P_i[T_x > ks] \leq (1 - \delta)^k.$$

En particular, $P_i[T_x < \infty] = 1$ y $E_i[T_x] \leq s/\delta < \infty$.

Demostración. Fijemos $i \in S$. Veamos que existe una historia $i = y_0, y_1, \ldots, y_l = x$ con $1 \leq l \leq s$, $q(y_{t-1}, y_t) > 0$ para todo t, y $y_t \neq x$ si $0 < t < l$. Si $i \neq x$, tomamos una historia de longitud mínima de i a x, que existe por irreducibilidad: sus estados son distintos, de modo que $l \leq s - 1$, y x sólo aparece al final. Si $i = x$ y $s = 1$, entonces $q(x, x) = 1$ y $l = 1$. Si $i = x$ y $s \geq 2$, existe $j \neq x$ con $q(x, j) > 0$ (de lo contrario x sería absorbente y no se alcanzaría ningún otro estado desde x); anteponiendo el paso $x \to j$ a una historia de longitud mínima de j a x se obtiene una historia con $l \leq s$.

La probabilidad $p_i = \prod_{t=1}^{l} q(y_{t-1}, y_t) > 0$ de seguir esa historia cumple $P_i[T_x \leq s] \geq p_i$. Como S es finito, $\delta := \min_i p_i > 0$ y

$$P_i[T_x \leq s] \geq \delta \qquad \text{para todo } i \in S.$$

Sea $k \geq 1$. El evento $[T_x > ks]$ es la unión disjunta de los eventos $B = [X_0 = i, X_1 = y_1, \ldots, X_{ks} = j]$ con $y_1, \ldots, y_{ks} \neq x$, y $[T_x > (k+1)s] = [T_x > ks] \cap [X_{ks+t} \neq x,\ 1 \leq t \leq s]$. Por la Proposición 1.6, para cada B como arriba,

$$P_i(B \cap [X_{ks+t} \neq x,\ 1 \leq t \leq s]) = P_i(B)\, P_j[T_x > s],$$

y sumando sobre B,

$$P_i[T_x > (k+1)s] = \sum_j P_i[T_x > ks,\ X_{ks} = j]\, P_j[T_x > s] \leq (1 - \delta)\, P_i[T_x > ks].$$

Como $P_i[T_x > s] \leq 1 - \delta$, por inducción $P_i[T_x > ks] \leq (1 - \delta)^k$. Finalmente, como $P_i[T_x > n] \leq (1 - \delta)^{\lfloor n/s \rfloor}$,

$$E_i[T_x] = \sum_{n \geq 0} P_i[T_x > n] \leq s \sum_{k \geq 0} (1 - \delta)^k = \frac{s}{\delta}.$$ □

Sean $\tau_0 = 0$ y $\tau_r = \min\{n > \tau_{r-1} : X_n = x\}$ el tiempo de la r-ésima visita a x (con $\tau_r = \infty$ si $\tau_{r-1} = \infty$), y $\sigma_r = \tau_r - \tau_{r-1}$ el tiempo entre visitas sucesivas. Bajo P_x, $\tau_1 = T_x$. Sea

$$\theta_x := E_x[T_x] = \sum_{n\geq 1} n\, f_n(x,x) < \infty.$$

Lema 3.17 (Tiempos entre visitas)**.** *Para todo $i \in S$, bajo P_i se tiene $\tau_r < \infty$ casi seguramente para todo $r \geq 1$, las variables $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ son independientes y $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$ tienen la misma distribución,*

$$P_i[\sigma_r = n] = f_n(x,x) \quad (n \geq 1,\ r \geq 2), \qquad E_i[\sigma_r] = \theta_x.$$

Demostración. Por el Lema 3.16, $\sum_n f_n(x,x) = P_x[T_x < \infty] = 1$ y $\tau_1 = T_x < \infty$ P_i-c.s.

Sea $r \geq 2$, $h = (h_1, \ldots, h_{r-1}) \in \mathbb{N}^{r-1}$, $H_h = [\sigma_1 = h_1, \ldots, \sigma_{r-1} = h_{r-1}]$ y $k = h_1 + \cdots + h_{r-1}$. El evento H_h es la unión disjunta de los eventos $B = [X_0 = i, X_1 = y_1, \ldots, X_k = x]$, donde $y_t = x$ si y sólo si $t \in \{h_1,\ h_1 + h_2,\ \ldots,\ k\}$, y sobre cada B se tiene $\tau_{r-1} = k$. Para $n \geq 1$, $B \cap [\sigma_r = n] = B \cap [X_{k+1} \neq x, \ldots, X_{k+n-1} \neq x,\ X_{k+n} = x]$, y por la Proposición 1.6,

$$\begin{aligned} P_i\big(B \cap [\sigma_r = n]\big) &= P_i(B) \sum_{z_1,\ldots,z_{n-1} \neq x} q(x,z_1)\, q(z_1,z_2) \cdots q(z_{n-1},x) \\ &= P_i(B)\, f_n(x,x). \end{aligned}$$

Sumando sobre B,

$$P_i(H_h \cap [\sigma_r = n]) = P_i(H_h)\, f_n(x,x) \qquad \text{para todo } h,\ n \geq 1. \tag{11}$$

Sumando (11) sobre n y usando $\sum_n f_n(x,x) = 1$ se obtiene $P_i(H_h \cap [\tau_r < \infty]) = P_i(H_h)$, y sumando sobre h, por inducción en r, $P_i[\tau_r < \infty] = 1$ para todo r. Entonces $\sum_h P_i(H_h) = 1$, y sumando (11) sobre h resulta $P_i[\sigma_r = n] = f_n(x,x)$. Por lo tanto (11) dice que $P_i(H_h \cap [\sigma_r = n]) = P_i(H_h)\, P_i[\sigma_r = n]$, es decir, σ_r es independiente de $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1})$; por inducción, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ son independientes. La media es $\sum_n n\, f_n(x,x) = \theta_x$. □

Teorema 3.18 (Frecuencia de visitas)**.** *Sea S finito y (X_n) una cadena irreducible, con distribución estacionaria π. Entonces, para toda distribución inicial μ y todo $x \in S$,*

$$\frac{V_n(x)}{n} \ \longrightarrow\ \pi(x) = \frac{1}{E_x[T_x]} \qquad P_\mu\text{-casi seguramente.}$$

Demostración. Fijemos $i \in S$ y trabajemos bajo P_i; el caso general sigue de $P_\mu = \sum_i \mu(i) P_i$.

Paso 1: tiempos entre visitas. Fijemos $x \in S$. Por el Lema 3.17, y como $\theta_x < \infty$ (Lema 3.16), la ley fuerte de los grandes números para variables i.i.d. da

$$\frac{\tau_r}{r} = \frac{\sigma_1}{r} + \frac{1}{r}\sum_{t=2}^{r} \sigma_t \ \longrightarrow\ \theta_x \qquad \text{c.s.},$$

pues $\sigma_1 < \infty$ c.s.

Paso 2: de ciclos a tiempo. Como $\tau_r < \infty$ para todo r, $\bar{V}_n(x) \to \infty$ c.s., y $\bar{V}_n(x) = \max\{r : \tau_r \leq n\}$ cumple $\tau_{\bar{V}_n} \leq n < \tau_{\bar{V}_n+1}$. Dividiendo entre $\bar{V}_n = \bar{V}_n(x)$,

$$\frac{\tau_{\bar{V}_n}}{\bar{V}_n} \ \leq\ \frac{n}{\bar{V}_n} \ <\ \frac{\tau_{\bar{V}_n+1}}{\bar{V}_n+1} \cdot \frac{\bar{V}_n+1}{\bar{V}_n}.$$

Por el Paso 1, ambos extremos convergen a θ_x c.s., y por lo tanto

$$\frac{\bar{V}_n(x)}{n} \ \longrightarrow\ w(x) := \frac{1}{\theta_x} \qquad \text{c.s.}$$

Como $|V_n(x) - \bar{V}_n(x)| \leq 1$, lo mismo vale para $V_n(x)/n$.

Paso 3: identificación con π. Sea $j \in S$. Como $0 \leq \bar{V}_n(j)/n \leq 1$, por convergencia acotada y el Paso 2,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k(i,j) = E_i\left[\frac{\bar{V}_n(j)}{n}\right] \longrightarrow w(j).$$

Por el Teorema 3.14, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} q_k(i,j) \to \pi(j)$, y las dos sumas difieren en $(q_n(i,j) - q_0(i,j))/n \to 0$. Por lo tanto $w(j) = \pi(j)$, es decir, $\pi(x) = 1/E_x[T_x]$. □

Corolario 3.19 (Ley de los grandes números para cadenas)**.** *Sea S finito y (X_n) una cadena irreducible, con distribución estacionaria π. Entonces, para toda distribución inicial μ y toda función $f : S \to \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \;\longrightarrow\; \sum_{x\in S} \pi(x) f(x) \qquad P_\mu\text{-casi seguramente.}$$

Demostración. Como S es finito, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{x\in S} f(x)\,\frac{V_n(x)}{n}$. Por el Teorema 3.18, la intersección de los eventos de probabilidad 1 en los que $V_n(x)/n \to \pi(x)$, para cada $x \in S$, tiene probabilidad 1, y en ella el lado derecho converge a $\sum_x \pi(x) f(x)$. □

Observación 3.20. (a) El Corolario 3.19 es una ley fuerte de los grandes números para variables *dependientes*: los sumandos $f(X_k)$ no son independientes, y la demostración del Teorema 3.18 recupera la independencia mediante los ciclos entre visitas sucesivas a x. Además, el teorema da la fórmula $\pi(x) = 1/E_x[T_x]$: la frecuencia de visitas a x es el inverso del tiempo medio de retorno.

(b) Los resultados no exigen aperiodicidad. Con $a = b = 1$ en el Ejemplo 3.4, la cadena alterna $1, 2, 1, 2, \ldots$ y $V_n(1)/n \to \frac{1}{2} = \pi(1)$, aunque $q_n(1,1)$ no converge.

(c) La irreducibilidad es necesaria. Si hay más de una clase recurrente, el límite de $V_n(x)/n$ existe pero es aleatorio: depende de la clase donde termina la cadena. Por ejemplo, si 1 y 2 son absorbentes y $X_0 = 3$ es transitorio con paso a 1 o 2, entonces $V_n(1)/n \to 1$ si la cadena es absorbida en 1, y $\to 0$ si lo es en 2.

(d) La demostración sigue la de [4, Teoremas 5.68 y 5.70], que vale para cadenas irreducibles con S numerable. Véanse también [1, Teorema 6.4.2] y [5, Corolario 4.60].

4. Ejercicios

Ejercicio 4.1 (Urnas de Ehrenfest)**.** Consideremos dos urnas, A y B, y un total de N bolas. Inicialmente, las bolas se distribuyen de manera arbitraria entre las dos urnas. En cada instante $n = 0, 1, 2, \ldots$ se realiza el siguiente experimento: se elige una de las N bolas al azar, todas con la misma probabilidad, y la bola elegida se cambia de urna.

Sea X_n el número de bolas que se encuentran en la urna A después del n-ésimo experimento.

(a) ¿Cuáles son los posibles valores de X_n? Es decir, determine el espacio de estados de la cadena.

(b) Supongamos que $X_n = i$. Calcule las probabilidades

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 \mid X_n = i)$$

y

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = i).$$

(c) Explique por qué $(X_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov homogénea.

(d) Para $N = 3$, escriba explícitamente la matriz de transición $P = [p_{ij}]$, siguiendo el orden de los estados

$$S = \{0, 1, 2, 3\}.$$

(e) Calcule $\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_0 = i)$.

Ejercicio 4.2 (Ruina del jugador)**.** Dos jugadores, A y B, juegan una sucesión de partidas. En cada partida uno de ellos puede ganar una unidad monetaria del otro. La probabilidad de que A gane una partida es p, y la probabilidad de que B gane es $q = 1 - p$. Los resultados de las partidas son independientes.

El jugador A comienza con N unidades monetarias y el jugador B con M unidades. El juego termina cuando alguno de los dos jugadores se queda sin dinero. Sea X_n la cantidad de dinero que tiene A después de n partidas.

(a) Determine el espacio de estados de (X_n).

(b) Supongamos que $X_n = i$, donde $0 < i < N + M$. Calcule

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 \mid X_n = i)$$

y

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = i).$$

(c) ¿Qué ocurre cuando $X_n = 0$ o cuando $X_n = N + M$? Determina las probabilidades de transición correspondientes.

(d) Verfique que $(X_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov homogénea y escriba sus probabilidades de transición

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

(e) Para $N + M = 4$, escriba explícitamente la matriz de transición P. Calcula $\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_0 = 2)$.

Ejercicio 4.3 (Movilidad social)**.** Consideremos una población cuyos individuos pueden clasificarse, de manera simplificada, en tres niveles socioeconómicos

$$S = \{B, M, A\},$$

donde B, M y A representan los niveles bajo, medio y alto, respectivamente. Supongamos que el nivel socioeconómico de una persona en una generación depende probabilísticamente de su nivel en la generación anterior. La matriz de transición es

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}23 & 0{,}02 \\ 0{,}15 & 0{,}70 & 0{,}15 \\ 0{,}03 & 0{,}22 & 0{,}75 \end{bmatrix}.$$

(a) Supongamos que inicialmente el 50 % de la población pertenece al nivel bajo, el 40 % al nivel medio y el 10 % al nivel alto. Escribe la distribución inicial μ_0 y calcula la distribución μ_1 después de una generación.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que una familia que actualmente pertenece al nivel bajo vuelva a estar en el nivel bajo en dos generaciones?

(c) Supongamos que una familia pertenece al nivel bajo en una determinada generación. ¿Cuál es la probabilidad de que ascienda dos niveles socioeconómicos en las dos generaciones siguientes, pasando de bajo a medio y posteriormente de medio a alto? Interprete en términos de porcentajes.

Sugerencia: Calcule $\mathbb{P}(X_1 = M, X_2 = A \mid X_0 = B)$.

Ejercicio 4.4. Demuestre que si P y Q son matrices estocásticas del mismo tamaño, entonces PQ es una matriz estocástica. Pruebe también que si μ es una distribución, μP también lo es.

Ejercicio 4.5. Si (X_n) es una CMH con matriz de transición P, demuestre que $Y_n := X_{2n}$ es una CMH con matriz de transición P^2.

Ejercicio 4.6 (Historias incompletas)**.** Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una CMH con espacio de estados S. Sean $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n$ y sean $x, y, x_{n_1}, \ldots, x_{n_k} \in S$. Defina

$$A = [X_{n_1} = x_{n_1}, \ldots, X_{n_k} = x_{n_k}, X_n = x],$$

y suponga que $\mathbb{P}(A) > 0$. Para la historia $h = (y_0, \ldots, y_n) \in S^{n+1}$, defina

$$B_h = [X_0 = y_0, \ldots, X_n = y_n].$$

(a) Sea Γ el conjunto de historias h tales que

$$y_{n_i} = x_{n_i}, \quad i = 1, \ldots, k, \qquad y_n = x.$$

Explique por qué $\mathbb{P}(X_{n+1} = y, A) = \sum_{h\in\Gamma} \mathbb{P}(X_{n+1} = y, B_h)$. Demuestre que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y, A) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)\mathbb{P}(A).$$

Sugerencia: Observe que $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid B_h) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$, para cualquier $h \in \Gamma$.

(b) Demuestre por inducción sobre $m \geq 1$ que

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid A) = \mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid X_n = x).$$

Sugerencia: De (a) se tiene el caso $m = 1$.

Ejercicio 4.7. Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una CMH con espacio de estados S y matriz de transición $P = [P(x, y)]$. Suponga que T es un tiempo de paro respecto a la filtración natural de (X_n), y sea $(x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de estados. Para $n \geq 0$ y la historia $h = (x_0, \ldots, x_{n-1}, x) \in S^{n+1}$, defina los eventos

$$E_n = [T = n,\ X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1},\ X_n = x]$$

y

$$B_h = [X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1},\ X_n = x].$$

(a) Usando la igualdad $\mathbf{1}_{[T=n]} = \varphi_n(X_0, \ldots, X_n)$, para alguna función medible φ_n con valores en $\{0, 1\}$, demuestre que

$$E_n = \begin{cases} B_h & \text{si } \varphi_n(h) = 1, \\ \varnothing & \text{si } \varphi_n(h) = 0. \end{cases}$$

(b) Si $\mathbb{P}(E_n) > 0$, demuestre que

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid E_n) = p_m(x, y).$$

Sugerencia: Argumente por qué $E_n = B_h$.

Ejercicio 4.8 (Propiedad fuerte de Markov)**.** En el contexto del Ejercicio 4.7, sea

$$E = [X_k = x_k,\ 0 \leq k < T,\ X_T = x],$$

y suponga que $\mathbb{P}(E) > 0$.

(a) Demuestre que

$$\mathbb{P}(X_{T+m} = y \mid E) = p_m(x, y).$$

Sugerencia: Observe que $[X_{T+m} = y] \cap E_n = [X_{n+m} = y] \cap E_n$. *Use el Ejercicio 4.7(b), es decir* $\mathbb{P}(X_{n+m} = y, E_n) = p_m(x, y)\,\mathbb{P}(E_n)$ *y sume sobre* n .

(b) Sea $E' = [X_T = x]$. Demuestre que

$$\mathbb{P}(X_{T+m} = y \mid E') = p_m(x, y),$$

Sugerencia: Note que $E \subseteq E'$, *luego* $\mathbb{P}(E') > 0$. *Repita el argumento de (a) con* $E'_n = [T = n,\ X_n = x]$.

(c) Concluya la **propiedad fuerte de Markov**

$$\mathbb{P}(X_{T+m} = y \mid X_k = x_k,\ 0 \le k < T,\ X_T = x) = \mathbb{P}(X_{T+m} = y \mid X_T = x).$$

Ejercicio 4.9. Considere la caminata aleatoria en $\mathbb{Z}$, con $q(j, j+1) = q(j, j-1) = \frac{1}{2}$. Pruebe que

$$q_n(0,0) = 0 \ \text{ si } n \text{ es impar}, \qquad q_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} > 0.$$

Ejercicio 4.10 (Potencias de una matriz de dos estados)**.** Sea $S = \{1, 2\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}, \qquad a, b \in [0, 1], \quad a + b > 0.$$

Sean $\pi = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$,

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 1 - a - b.$$

(a) Demuestre que $\pi Q = \pi$ y que π es una distribución.

(b) Demuestre que $\Pi Q = \Pi$.

(c) Demuestre que $Q\Pi = \Pi$. (Sugerencia: use que las filas de Q suman 1.)

(d) Demuestre que $\Pi^2 = \Pi$.

(e) Demuestre que $Q = \Pi + \lambda(I - \Pi)$, verificando cada una de las cuatro entradas.

(f) Demuestre por inducción sobre $n \ge 0$ que

$$Q^n = \Pi + \lambda^n(I - \Pi).$$

(g) Demuestre que $I - \Pi \neq 0$ y deduzca que $Q^n \to \Pi$ si y sólo si $|\lambda| < 1$. ¿Para qué valores de a y b falla esta condición?

(h) Si $0 < a, b < 1$, calcule $\varepsilon = \sum_y \min_x q(x, y)$ y compruebe que se cumple la cota del Teorema 3.11 con $N = 1$ para $\mu = (1, 0)$, es decir,

$$\|\mu Q^n - \pi\|_1 \le 2(1 - \varepsilon)^n.$$

Ejercicio 4.11 (Estados recurrentes y transitorios)**.** Sea $S = \{1, 2, 3\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Determine las clases comunicantes y diga cuáles son cerradas.

(b) Calcule $f_n(3,3)$ para todo $n \geq 1$ y deduzca $f(3,3)$. ¿Es 3 recurrente o transitorio?

(c) Calcule $q_n(3,3)$ y verifique que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} q_n(3,3) = \frac{f(3,3)}{1-f(3,3)}$.

(d) Demuestre que los estados 1 y 2 son recurrentes. (Sugerencia: la restricción de Q a $\{1,2\}$ es una cadena finita e irreducible; use la Proposición 2.14 y el Teorema 2.12.)

(e) Escriba la descomposición $S = T \cup C_1 \cup \cdots$ del Teorema 2.13.

Respuestas. (a) Las clases comunicantes son $\{1,2\}$, que es cerrada, y $\{3\}$, que no es cerrada. (b) $f_1(3,3) = \frac{1}{2}$ y $f_n(3,3) = 0$ para $n \geq 2$, 3 es transitorio. (c) $q_n(3,3) = \frac{1}{2^n}$.

Ejercicio 4.12. Sea $S = \{1,2\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre por inducción que $Q^n = \begin{bmatrix} 2^{-n} & 1-2^{-n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ para todo $n \geq 1$.

(b) Use la primera igualdad del Lema 2.2, con $i = 1$ y $j = 2$, para calcular $f_m(1,2)$ para todo $m \geq 1$. (Sugerencia: $q_r(2,2) = 1$ para todo $r \geq 0$, así que $q_m(1,2) = \sum_{k=1}^{m} f_k(1,2)$; reste la igualdad de $m-1$ a la de m.) Deduzca $f(1,2)$.

(c) ¿Qué estados son recurrentes y cuáles transitorios?

Respuestas. (b) $f(1,2) = 1$. (c) El estado 1 es transitorio, 2 es recurrente (absorbente).

Ejercicio 4.13. Sea $S = \{1,2,3\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre por inducción que, para todo $n \geq 1$,

$$q_n(1,1) = q_n(2,2) = 2^{-n}, \qquad q_n(3,3) = 1, \qquad q_n(1,2) = n\,2^{-n}.$$

(b) Demuestre que el estado 3 es recurrente.

(c) Use el Corolario 2.4 para concluir que 1 y 2 son transitorios. Calcule $f(1,1)$ y $f(2,2)$.

(d) Calcule $f(1,2)$. Interprete el resultado.

Sugerencia: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1.$

(e) Demuestre que $q_n(1,3) = 1 - (n+1)2^{-n}$.

Sugerencia: Recuerde que las filas de Q^n suman 1.

Respuestas. (c) $f(1,1) = f(2,2) = \frac{1}{2}$ (d) $f(1,2) = 1$

Ejercicio 4.14. Sea $S = \{1,2,3\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre que la cadena es irreducible.

(b) Encuentre la distribución estacionaria.

Respuestas. (b) $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

Ejercicio 4.15. Sea $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ sobre $S = \{1, 2\}$ y $w = (1, 0)$. Compruebe que $wQ = w$. ¿Es éste un contraejemplo al Lema 3.5?

Ejercicio 4.16. Para cada una de las siguientes matrices de transición determine las clases comunicantes, cuáles son recurrentes, y todas las distribuciones estacionarias.

(a) $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(c) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(d) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

Respuestas. (a) La cadena es irreducible (ciclo de período 3) $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. (b) 1 es absorbente y 2, 3 son transitorios, $\pi = (1, 0, 0)$. (c) Las clases $\{1\}$ y $\{2, 3\}$ son cerradas y recurrentes, $\pi = \lambda(1, 0, 0) + (1 - \lambda)(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\lambda \in [0, 1]$. (d) 1 y 3 son absorbentes, 2 es transitorio, $\pi = \lambda(1, 0, 0) + (1 - \lambda)(0, 0, 1)$. (e) Las clases $\{1, 2\}$ y $\{3, 4\}$ son cerradas y recurrentes. Restringiendo Q a cada una, se obtienen las estacionarias $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $(\frac{3}{11}, \frac{8}{11})$ (ver Ejemplo 3.4 y Observación 3.9), $\pi = \lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0) + (1 - \lambda)(0, 0, \frac{3}{11}, \frac{8}{11})$.

Ejercicio 4.17. Sean $S = \{1, 2, 3\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule Q^2.

(b) Calcule $\varepsilon = \sum_y \min_x q_N(x, y)$ para $N = 1$ y para $N = 2$.

(c) Encuentre la distribución estacionaria π y explique por qué es única.

(d) Sea $\mu = (1, 0, 0)$. Calcule μQ^2 y μQ^4, y compruebe la cota $\|\mu Q^n - \pi\|_1 \leq 2(1 - \varepsilon)^{\lfloor n/N \rfloor}$ para $n = 2$ y $n = 4$.

(e) Sea Π la matriz 3×3 cuyas entradas son todas $\frac{1}{3}$. Demuestre por inducción que

$$Q^n = \Pi + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n (I - \Pi),$$

y deduzca que $\|\mu Q^n - \pi\|_1 = 2^{-n} \|\mu - \pi\|_1$ para toda distribución μ.

Respuestas. (a) $Q^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (b) Para $N = 1$, $\varepsilon = 0$. Para $N = 2$, $\varepsilon = \frac{3}{4}$. (c) $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, use el Teorema 3.11. (d) $\mu Q^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y $\mu Q^4 = (\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16})$. Entonces $\|\mu Q^2 - \pi\|_1 = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$ y $\|\mu Q^4 - \pi\|_1 = \frac{1}{12} \leq \frac{1}{8}$. (e) Pruebe primero que $Q = \frac{1}{2}(3\Pi - I)$. Verifique la igualdad $Q = \Pi - \frac{1}{2}(I - \Pi)$, que es el caso $n = 1$. Compruebe $\Pi Q = Q\Pi = \Pi$ y $\Pi^2 = \Pi$. Suponga que la igualdad es cierta para n, luego $Q^{n+1} = Q^n Q = \Pi + (-\frac{1}{2})^n (Q - \Pi) = \Pi + (-\frac{1}{2})^{n+1}(I - \Pi)$. Como $\mu\Pi = \pi$, resulta $\mu Q^n - \pi = (-\frac{1}{2})^n(\mu - \pi)$.

Ejercicio 4.18. Considere las siguientes matrices sobre $S = \{1, 2\}$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Puede usarse el Teorema 3.11?

Respuestas. Para Q, Q^n alterna entre I y Q, así que $\mu Q'^n$ no converge si $\mu \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Para P, la entrada $(2,1)$ de P^n es siempre 0, no puede usarse el Teorema 3.11; sin embargo, $\mu Q''^n \to (0,1)$ con $\|\mu Q''^n - \pi\|_1 \leq 2 \cdot 2^{-n}$ (vea la Observación 3.13).

Ejercicio 4.19. (a) Sea $S = \{1, 2, 3\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que $Q^3 = I$ y calcule $q_n(1,1)$ para todo $n \geq 0$. Explique por qué $q_n(1,1)$ no converge.

(b) Con la matriz del inciso (a), demuestre que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} q_n(1,1) = \frac{\lceil N/3 \rceil}{N}, \qquad \left| \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} q_n(1,1) - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{2}{3N},$$

y compruebe que el límite coincide con $\pi(1)$, donde π es la distribución estacionaria de Q. ¿Por qué el Teorema 3.14 se aplica aquí pero el Teorema 3.11 no?

Respuestas. (a) Q es la matriz de permutación del ciclo $1 \to 2 \to 3 \to 1$, de modo que $Q^3 = I$. Entonces $q_n(1,1) = 1$ si $3 \mid n$ y $q_n(1,1) = 0$ en otro caso, es decir, la sucesión $1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots$ no converge. (b) En $\{0, \ldots, N-1\}$ hay $\lceil N/3 \rceil$ múltiplos de 3, lo que da el primer resultado. Si $N = 3m + r$ con $r \in \{0, 1, 2\}$, la diferencia con $\frac{1}{3}$ es 0, $\frac{2}{3N}$ o $\frac{1}{3N}$. La cadena es irreducible con $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. El Teorema 3.14 sólo pide irreducibilidad, mientras que el Teorema 3.11 pide que alguna potencia Q^N tenga todas sus entradas positivas, lo cual falla porque las potencias de Q son Q, Q^2 e I.

Ejercicio 4.20. Sea $S = \{0, 1, 2\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que $q_0(0,0) = 1$, $q_n(0,0) = 0$ si n es impar y $q_n(0,0) = \frac{1}{2}$ si $n \geq 2$ es par. Calcule el promedio $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} q_n(0,0)$ para $N = 2m$ y para $N = 2m + 1$, y verifique que converge a $\pi(0)$, donde π es la distribución estacionaria de Q.

Respuesta. La fila 0 de Q^2 es $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ y la de Q^3 es $(0, 1, 0)$, y a partir de ahí se repite con periodo 2. Para $N = 2m$ la suma es igual a $1 + \frac{m-1}{2} = \frac{m+1}{2}$ y el promedio es $\frac{m+1}{4m}$. Para $N = 2m + 1$ la suma es igual a $\frac{m+2}{2}$ y el promedio es $\frac{m+2}{2(2m+1)}$. En ambos casos el límite es $\frac{1}{4}$, que es $\pi(0)$ para $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

Ejercicio 4.21. Sean $S = \{1, 2\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Recordemos que $V_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[X_k=x]}$ es el número de visitas a x antes del tiempo n y

$$f_n(i, x) = P_i[T_x = n]$$

es la probabilidad (5) de primera visita a x en n pasos.

(a) Se observa la historia $X_0, X_1, \ldots, X_7$ dada por $1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2$. Calcule $V_8(1)$ y $V_8(2)$.

(b) Suponga $X_0 = 1$. Escriba $V_2(1)$ en términos de X_0 y X_1. Calcule $E_1[V_2(1)]$.

(c) Demuestre que

$$E_1[V_n(1)] = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(1, 1) = \frac{n+1}{2}.$$

Sugerencia: $Q^k = Q$ para todo $k \geq 1$. Recuerde que $E[1_B] = P(B)$.

(d) Calcule $\lim_{n\to\infty} E_1[V_n(1)]/n$ y compárelo con la distribución estacionaria π de Q.

(e) Calcule $f_n(1, 1)$ para todo $n \geq 1$ y deduzca que $E_1[T_1] = 2$. Verifique que $E_1[T_1] = 1/\pi(1)$ e interprete el resultado.

Respuestas. (a) $V_8(1) = 5$ y $V_8(2) = 3$ (b) $V_2(1) = \mathbf{1}_{[X_0=1]} + \mathbf{1}_{[X_1=1]} = 1 + \mathbf{1}_{[X_1=1]}$. La v.a. $V_2(1)$ toma el valor 2 si $X_1 = 1$ y el valor 1 si $X_1 = 2$, cada uno con probabilidad $\frac{1}{2}$, de modo que $E_1[V_2(1)] = \frac{3}{2}$. (c) Observe que $q_0(1, 1) = 1$ y $q_k(1, 1) = \frac{1}{2}$ para $k \geq 1$, entonces

$$E_1[V_n(1)] = \sum_{k=0}^{n-1} E_1[\mathbf{1}_{[X_k=1]}] = 1 + \tfrac{1}{2}(n-1).$$

(e) $f_n(1, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2}$, $E_1[T_1] = \sum_{n\geq 1} n2^{-n} = 2 = 1/\pi(1)$. La cadena regresa a 1, en promedio, cada 2 pasos.

Ejercicio 4.22. Sean $S = \{1, 2\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre que la cadena es irreducible y aperiódica, y encuentre su distribución estacionaria π.

(b) Calcule $f_n(1, 1)$, para $n \geq 1$, y deduzca que $E_1[T_1] = 3$.

(c) Calcule $P_2[T_1 = n]$, para $n \geq 1$, y $E_2[T_1]$. Condicionando en X_1, deduzca que $E_1[T_1] = 1 + E_2[T_1]$.

(d) Demuestre que

$$q_n(1, 1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad n \geq 0.$$

Sugerencia: Use el Ejercicio 4.10.

(e) Sin hacer cálculos, explique por qué $E_1[V_n(1)]/n \to \pi(1)$. Compare con $E_1[V_n(1)] = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(1, 1)$.

Respuestas. (a) Se tiene $1 \to 2$ y $2 \to 1$, luego la cadena es irreducible. Como $q(2, 2) > 0$, $d(2) = 1$ y, por el Teorema 2.12(a), $d(1) = 1$. $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (b) $f_1(1, 1) = q(1, 1) = 0$. Para $n \geq 2$, la única historia posible es $1 \to 2 \to \cdots \to 2 \to 1$, con $n - 2$ permanencias en 2, de modo que $f_n(1, 1) = 1 \cdot (\frac{1}{2})^{n-2} \cdot \frac{1}{2}$. (c) $P_2[T_1 = n] = (\frac{1}{2})^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = 2^{-n}$ (se permanece $n-1$ pasos en 2 y luego se pasa a 1), y $E_2[T_1] = \sum_{n\geq 1} n2^{-n} = 2$. Como $X_1 = 2$ con probabilidad 1 partiendo de 1, se tiene $T_1 = 1 +$ (tiempo de llegada a 1 desde 2) y $E_1[T_1] = 1 + E_2[T_1]$. (d)

Con $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ y $\lambda = 1 - a - b = -\frac{1}{2}$ se tiene $Q^n = \Pi + \lambda^n(I - \Pi)$ con Π de filas $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. (e) Por linealidad y $E_1[\mathbf{1}_{[X_k=1]}] = P_1[X_k = 1] = q_k(1, 1)$,

$$E_1[V_n(1)] = \frac{n}{3} + \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

Ejercicio 4.23 (Costo promedio de una máquina)**.** Una máquina se revisa cada día y se clasifica en uno de tres estados: 1 = funciona, 2 = falla leve y 3 = en reparación. Suponga que el estado de cada día depende sólo del estado del día anterior, con matriz de transición

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un día en el estado 1 no cuesta nada, un día en el estado 2 cuesta 100 y un día en el estado 3 cuesta 400. Sea $f(1) = 0$, $f(2) = 100$, $f(3) = 400$.

(a) Demuestre que la cadena es irreducible y encuentre su distribución estacionaria π.

(b) Sea $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ el costo de los primeros n días. Calcule ncontrar el límite de C_n/n cuando $n \to \infty$. ¿Qué tipo de convergencia se tiene? Interprete el resultado.

(c) ¿A qué valor converge $V_n(3)/n$? Encuentre $E_3[T_3]$ e interprete el resultado en términos de la frecuencia de reparaciones.

(d) Para $n = 300$ días, ¿cuántos días de reparación se esperan, aproximadamente, en una historia típica?

Respuestas. (a) Se tiene $1 \to 2 \to 3 \to 1$ y $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$. (b) Por el Corolario 3.19, casi seguramente

$$\frac{C_n}{n} \longrightarrow \sum_x \pi(x)f(x) = 100.$$

En una historia larga, el costo promedio por día tiende a 100, sin importar el estado inicial. (c) Por el Teorema 3.18, $V_n(3)/n \to \pi(3) = \frac{1}{6}$, casi seguramente, $E_3[T_3] = 1/\pi(3) = 6$. La máquina entra en reparación, en promedio, cada 6 días. (d) Se esperan, aproximadamente, $300 \cdot \frac{1}{6} = 50$ días de reparación.

Ejercicio 4.24. Un vendedor de helados clasifica cada día como 1 = soleado, 2 = nublado o 3 = lluvioso. Suponga que el clima de cada día depende sólo del clima del día anterior, con matriz de transición

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Las ventas de un día soleado son de 1300 pesos, las de un día nublado de 650 pesos y las de un día lluvioso de 0 pesos. Sea $f(1) = 1300$, $f(2) = 650$, $f(3) = 0$. Sea $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ el ingreso de los primeros n días.

¿Se cumple que la cadena es irreducible? Demuestre que existe una constante c tal que $I_n/n \to c$ casi seguramente, sin importar el clima del día inicial, y calcule c. Interprete el resultado. Aproxime las ventas totales de un año (365 días).

Respuestas. La cadena es irreducible, así que se cumplen las hipótesis del Corolario 3.19: casi seguramente, y para cualquier estado inicial,

$$\frac{I_n}{n} \longrightarrow \sum_x \pi(x)f(x) = 700.$$

Referencias

[1] P. Brémaud, *Probability Theory and Stochastic Processes*, Universitext, Springer, Cham, 2020.

[2] Z. Brzeźniak y T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes: A Course Through Exercises*, capítulo 5, "Markov Chains".

[3] G. Grimmett y D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 3rd ed., Oxford University Press, Oxford, 2001.

[4] G. Modica y L. Poggiolini, *A First Course in Probability and Markov Chains*, Wiley, Chichester, 2013.

[5] L. I. Nicolaescu, *A Graduate Course in Probability*, World Scientific, Singapore, 2023.