Procesos estocásticos en tiempo continuo

D. González Sánchez

Otoño de 2026

Contenido

1. Fundamentos **1**
1.1. Distribuciones finito-dimensionales 1
1.2. Espacios producto y extensión de Kolmogorov* 3
1.3. Construcción de procesos estocásticos 8
1.4. Modificaciones y continuidad 10
1.5. Procesos gaussianos 12
1.6. Filtraciones y martingalas 14

2. El proceso de Poisson **17**
2.1. Construcción mediante tiempos de llegada 17
2.2. Incrementos y caracterización del proceso 19
2.3. Martingalas y operaciones con procesos de Poisson 22

3. Movimiento browniano **24**
3.1. Definición y construcción 24
3.2. Estructura gaussiana e invariancias 25
3.3. Densidad de transición y martingalas 28
3.4. Trayectorias y principio de reflexión 29

4. Ejercicios **32**

1. Fundamentos

1.1. Distribuciones finito-dimensionales

Asumimos que todas las variables aleatorias están definidas en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ y por $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Como es usual, $\mathbb{N}$ denota al conjunto de números naturales y $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. A menos que se diga lo contrario, el conjunto de índices (el "tiempo") es $T = \mathbb{R}_+$.

Definición 1.1. Sea T un conjunto de índices y sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto boreliano. Un **proceso estocástico** con conjunto de índices T y **espacio de estados** S es una familia $X = (X_t)_{t\in T}$ de variables aleatorias $X_t : \Omega \to S$. Si $T = \mathbb{N}_0$ decimos que el proceso es a **tiempo discreto**; si $T = \mathbb{R}_+$ (o un intervalo de $\mathbb{R}$) decimos que es a **tiempo continuo**.

Un proceso estocástico es entonces una función de dos variables

$$X : T \times \Omega \to S, \qquad (t, \omega) \mapsto X_t(\omega).$$

Si fijamos $t \in T$, obtenemos la variable aleatoria $\omega \mapsto X_t(\omega)$. Si fijamos $\omega \in \Omega$, obtenemos una función del tiempo

$$t \mapsto X_t(\omega),$$

que se llama **trayectoria** (o realización) del proceso correspondiente a ω. Para cada $\omega \in \Omega$, el proceso estocástico genera una trayectoria completa.

Ejemplo 1.2 (Una oscilación con fase aleatoria)**.** Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0, 2\pi]$ y sea

$$X_t = \cos(t + U), \qquad t \geq 0.$$

Cada trayectoria $t \mapsto \cos(t + U(\omega))$ es una función coseno desplazada; el azar sólo interviene en la fase inicial. Notemos que

$$\mathbb{E}[X_t] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t + u)\, du = 0,$$

para todo $t \geq 0$.

Ejemplo 1.3 (Interpolación de una caminata aleatoria)**.** Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con $\mathbb{P}[\xi_k = 1] = \mathbb{P}[\xi_k = -1] = \frac{1}{2}$ y sea $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $S_0 = 0$, la caminata aleatoria simple. Definimos el proceso a tiempo continuo

$$X_t = S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)\, \xi_{\lfloor t \rfloor + 1}, \qquad t \geq 0,$$

es decir, X coincide con S_n en los enteros y se interpola linealmente entre ellos. Sus trayectorias son funciones continuas y lineales a pedazos. En la Sección 3 veremos que, al reescalar adecuadamente este proceso, se obtiene el movimiento browniano.

Definición 1.4. Sea $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada colección de tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, la **distribución finito-dimensional** de X en $(t_1, \ldots, t_n)$ es la medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B) = \mathbb{P}\big[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in B\big], \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Dos procesos X y Y (posiblemente definidos en espacios de probabilidad distintos) son **iguales en distribución**, y escribimos $X \overset{d}{=} Y$, si tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales.

La familia $\{\mu_{t_1,\ldots,t_n}\}$ no es arbitraria: si eliminamos un tiempo t_k, debemos obtener la marginal correspondiente. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_{k-1} \times \mathbb{R} \times B_{k+1} \times \cdots \times B_n) \\ &\qquad = \mu_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_{k-1} \times B_{k+1} \times \cdots \times B_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Esta propiedad se llama **condición de consistencia**.

Otra propiedad fundamental de los procesos es la estructura de sus incrementos.

Incrementos. Los dos procesos centrales de estas notas, el proceso de Poisson y el movimiento browniano, comparten una estructura muy sencilla: lo que el proceso hace en intervalos de tiempo disjuntos es independiente.

Definición 1.5. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico.

(a) X tiene **incrementos independientes** si para cualesquiera $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ las variables aleatorias

$$X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes.

(b) X tiene **incrementos estacionarios** si para cualesquiera $0 \leq s < t$ y $h \geq 0$,

$$X_{t+h} - X_{s+h} \overset{d}{=} X_t - X_s,$$

es decir, la distribución de un incremento sólo depende de la longitud $t - s$ del intervalo.

Proposición 1.6. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso con incrementos independientes y $X_0 = 0$. Entonces las distribuciones finito-dimensionales de X quedan determinadas por las distribuciones de los incrementos $X_t - X_s$, $0 \leq s < t$.*

Demostración. Sean $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ y sean $D_k = X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$, $k = 1, \ldots, n$. Por hipótesis, $D_1, \ldots, D_n$ son independientes, así que la distribución conjunta de $(D_1, \ldots, D_n)$ es el producto de las distribuciones de cada D_k. Como $X_0 = 0$,

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) = (D_1,\, D_1 + D_2,\, \ldots,\, D_1 + \cdots + D_n) = g(D_1, \ldots, D_n),$$

donde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la transformación lineal (y continua) $g(d_1, \ldots, d_n) = (d_1, d_1 + d_2, \ldots, d_1 + \cdots + d_n)$. Por lo tanto, para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{P}\big[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in B\big] = \mathbb{P}\big[(D_1, \ldots, D_n) \in g^{-1}(B)\big],$$

que sólo depende de las distribuciones de los incrementos. □

Ejemplo 1.7. La caminata aleatoria $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ del Ejemplo 1.3 tiene incrementos independientes y estacionarios a tiempo discreto: si $m < n$, entonces $S_n - S_m = \xi_{m+1} + \cdots + \xi_n$ depende sólo de las variables $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n$ y tiene la misma distribución que S_{n-m}.

1.2. Espacios producto y extensión de Kolmogorov*

Espacios producto. Consideremos n espacios medibles $(\Omega_j, \mathscr{F}_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Si $B_j \in \mathscr{F}_j$ para $j = 1, \ldots, n$, el conjunto $B = B_1 \times \cdots \times B_n$ se llama **rectángulo medible**. Recordemos que la σ-álgebra producto

$$\mathscr{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{F}_n$$

sobre $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ es la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles.

Sea T un conjunto no vacío y, para cada $t \in T$, sea $(\Omega_t, \mathscr{F}_t)$ un espacio medible.

(a) Sea $\Omega := \bigtimes_{t\in T} \Omega_t$, es decir,

$$\Omega := \{\omega = (\omega(t);\, t \in T) \mid \omega(t) \in \Omega_t \ \ \forall t \in T\}. \tag{2}$$

Si $\Omega_t = \mathbb{R}$ para todo $t \in T$, entonces Ω consiste de todas las funciones $\omega : T \to \mathbb{R}$ y se denota $\mathbb{R}^T$. Un elemento $\omega \in \mathbb{R}^T$ también se escribe $\omega = (\omega_t)_{t\in T}$. Cuando $T = \mathbb{N}$, el producto Ω consiste de todas las sucesiones $(\omega(n);\, n \in \mathbb{N})$, que usualmente se escriben $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots)$.

(b) Sea $\mathscr{T}$ la colección de todos los subconjuntos finitos de T. Escribimos

$$\Omega_\tau := \bigtimes_{t\in\tau} \Omega_t \qquad \text{y} \qquad \mathscr{F}_\tau := \bigotimes_{t\in\tau} \mathscr{F}_t, \qquad \tau \in \mathscr{T}.$$

(c) Sean $\sigma \subseteq \tau$, digamos $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$ y $\sigma = \{t_{j_1}, \ldots, t_{j_k}\}$, y sea $x \in \Omega_\tau$. Para $x = (x(t_1), \ldots, x(t_n))$, escribimos

$$x_\sigma := (x(t_{j_1}), \ldots, x(t_{j_k})).$$

Definición 1.8. Dado un subconjunto B de Ω_τ, donde $\tau = \{t_1, \ldots, t_k\} \in \mathscr{T}$, el **cilindro** B_∞ con base B es

$$B_\infty := \{\omega \in \Omega \mid (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_k)) \in B\}. \tag{3}$$

El cilindro B_∞ es **medible** si su base B es medible, es decir, si

$$B \in \mathscr{F}_\tau$$

para algún $\tau \in \mathscr{T}$. Denotamos por $\mathscr{F}_\infty$ la colección de todos los cilindros medibles del producto (2).

El cilindro B_∞ de (3) también se escribe como

$$B_\infty = B \times \bigtimes_{t \notin \tau} \Omega_t.$$

Observemos que un cilindro puede tener más de una base, pues

$$B_\infty = B \times \Omega_{t'} \times \bigtimes_{t \notin \tau,\ t \neq t'} \Omega_t$$

para cualquier $t' \in T \setminus \tau$.

Lema 1.9. *Sean $A \in \mathscr{F}_\tau$ y $B \in \mathscr{F}_\sigma$ para algunos $\tau, \sigma \in \mathscr{T}$. Entonces existen*

$$A', B' \in \mathscr{F}_{\tau \cup \sigma}$$

tales que $A_\infty = A'_\infty$ y $B_\infty = B'_\infty$. Además,

(a) *si $A_\infty \subseteq B_\infty$, entonces $A' \subseteq B'$,*

(b) *si $A_\infty = B_\infty$, entonces $A' = B'$,*

(c) *$A_\infty \cup B_\infty = (A' \cup B')_\infty$, y*

(d) *$A_\infty \cap B_\infty = (A' \cap B')_\infty$.*

Demostración. Ordenemos el conjunto finito $\tau \cup \sigma$ y sean

$$A' := \{x \in \Omega_{\tau \cup \sigma} \mid x_\tau \in A\} \qquad \text{y} \qquad B' := \{x \in \Omega_{\tau \cup \sigma} \mid x_\sigma \in B\}.$$

Entonces $A'_\infty = \{\omega \in \Omega \mid \omega_\tau \in A\} = A_\infty$ y, análogamente, $B'_\infty = B_\infty$.

(a) Sea $x \in A'$, digamos $x = (x_t)_{t \in \tau \cup \sigma}$. Escojamos $\omega \in \Omega$ y definamos $\omega' \in \Omega$ por

$$\omega'(t) := \begin{cases} x_t & \text{si } t \in \tau \cup \sigma, \\ \omega(t) & \text{si } t \notin \tau \cup \sigma. \end{cases}$$

Entonces $\omega' \in A'_\infty = A_\infty \subseteq B_\infty = B'_\infty$, lo que implica $x = \omega'_{\tau \cup \sigma} \in B'$. Esto prueba que $A' \subseteq B'$.

(b) La igualdad $A' = B'$ se sigue de (a), aplicada en ambos sentidos.

(c)

$$\begin{aligned} A_\infty \cup B_\infty &= A'_\infty \cup B'_\infty \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \omega_{\tau \cup \sigma} \in A'\} \cup \{\omega \in \Omega \mid \omega_{\tau \cup \sigma} \in B'\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \omega_{\tau \cup \sigma} \in A' \cup B'\} \\ &= (A' \cup B')_\infty. \end{aligned}$$

(d) Se sigue de manera similar. □

Corolario 1.10. *La colección $\mathscr{F}_\infty$ es un álgebra de subconjuntos de Ω.*

Demostración. Claramente $\Omega \in \mathscr{F}_\infty$, pues para cualquier subconjunto finito τ de T,

$$\Omega = (\Omega_\tau)_\infty = \Omega_\tau \times \bigtimes_{t \notin \tau} \Omega_t.$$

Consideremos ahora el cilindro medible A_∞, con base $A \in \mathscr{F}_\tau$. Entonces

$$\begin{aligned}(A_\infty)^c &= \Big(A \times \bigtimes_{t\notin\tau} \Omega_t\Big)^c \\ &= A^c \times \bigtimes_{t\notin\tau} \Omega_t \\ &= (A^c)_\infty,\end{aligned}$$

lo que muestra que $(A_\infty)^c \in \mathscr{F}_\infty$. Finalmente, por el Lema 1.9(c), la colección $\mathscr{F}_\infty$ es cerrada bajo uniones finitas. □

Definición 1.11. Para cada $t \in T$, sea $(\Omega_t, \mathscr{F}_t)$ un espacio medible. La σ-álgebra generada por el álgebra $\mathscr{F}_\infty$ se llama **σ-álgebra producto** y se denota $\mathscr{F}$. El espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$ se llama simplemente **espacio producto**.

Si $(\Omega_t, \mathscr{F}_t) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ para todo $t \in T$, el espacio producto se denota $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$.

Definición 1.12. Para cada $\tau \in \mathscr{T}$, sea P_τ una medida de probabilidad sobre $\mathscr{F}_\tau$. Para $\sigma \subseteq \tau$, la **proyección** $\pi_\sigma[P_\tau]$ de P_τ sobre $\mathscr{F}_\sigma$ se define como

$$\pi_\sigma[P_\tau](B) = P_\tau\big[x \in \Omega_\tau \mid x_\sigma \in B\big], \qquad B \in \mathscr{F}_\sigma.$$

La familia $\{P_\tau \mid \tau \in \mathscr{T}\}$ es **consistente** si, para cada $\sigma \subseteq \tau$,

$$\pi_\sigma[P_\tau] = P_\sigma.$$

Proposición 1.13. *Para cada $\tau \in \mathscr{T}$, sea P_τ una medida de probabilidad sobre $\mathscr{F}_\tau$. Si $\{P_\tau \mid \tau \in \mathscr{T}\}$ es consistente, entonces la función $P_\infty : \mathscr{F}_\infty \to [0,1]$ dada por*

$$P_\infty(B_\infty) = P_\tau(B), \qquad B \in \mathscr{F}_\tau,$$

está bien definida y es finitamente aditiva.

Demostración. Como bases distintas pueden generar el mismo cilindro, debemos mostrar que P_∞ está bien definida. Supongamos que $A \in \mathscr{F}_\tau$ y $B \in \mathscr{F}_\sigma$, para algunos $\tau, \sigma \in \mathscr{T}$, satisfacen

$$A_\infty = B_\infty.$$

Por el Lema 1.9(b), los conjuntos $A' = \{x \in \Omega_{\tau\cup\sigma} \mid x_\tau \in A\}$ y $B' = \{x \in \Omega_{\tau\cup\sigma} \mid x_\sigma \in B\}$ satisfacen $A'_\infty = A_\infty$, $B'_\infty = B_\infty$ y

$$A' = B'.$$

Como $\{P_\tau \mid \tau \in \mathscr{T}\}$ es consistente,

$$\begin{aligned}P_\tau(A) &= \pi_\tau[P_{\tau\cup\sigma}](A) \\ &= P_{\tau\cup\sigma}(A') \\ &= P_{\tau\cup\sigma}(B') \\ &= \pi_\sigma[P_{\tau\cup\sigma}](B) \\ &= P_\sigma(B).\end{aligned}$$

Esto muestra que P_∞ está bien definida.

Dada una colección finita $\{B_\infty^{(1)}, \dots, B_\infty^{(k)}\}$ de cilindros medibles disjuntos, podemos hallar conjuntos disjuntos $\{\widetilde{B}^{(1)}, \dots, \widetilde{B}^{(k)}\}$ tales que

$$\widetilde{B}^{(j)} \in \mathscr{F}_\tau \quad \text{y} \quad (\widetilde{B}^{(j)})_\infty = B_\infty^{(j)}, \qquad j = 1, \dots, k,$$

para algún $\tau \in \mathscr{T}$ suficientemente grande. Como P_τ es una medida de probabilidad,

$$\begin{aligned} P_\infty\Big(\bigcup_{j=1}^{k} B_\infty^{(j)}\Big) &= P_\tau\Big(\bigcup_{j=1}^{k} \widetilde{B}^{(j)}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{k} P_\tau(\widetilde{B}^{(j)}) \\ &= \sum_{j=1}^{k} P_\infty(B_\infty^{(j)}). \end{aligned}$$

Esto prueba que P_∞ es finitamente aditiva sobre el álgebra $\mathscr{F}_\infty$. □

Demostraremos ahora el teorema de extensión de Kolmogorov, llamado por el propio Kolmogorov *Teorema Fundamental* [**?**, p. 29]. Recordemos primero el siguiente teorema bien conocido, cuya demostración puede encontrarse en cualquier texto de posgrado de probabilidad o teoría de la medida.

Teorema 1.14 (Teorema de extensión)**.** *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω. Si μ es una medida σ-finita sobre $\mathscr{A}$, entonces μ tiene una única extensión a una medida sobre $\sigma(\mathscr{A})$.*

Recordemos que la función de conjuntos $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ es una *medida sobre el álgebra* $\mathscr{A}$ si μ es *numerablemente aditiva*, es decir, para toda sucesión disjunta $\{A_n\}$ en $\mathscr{A}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Para aplicar el teorema de Carathéodory, una condición suficiente para que μ sea una medida es la *continuidad en* $\emptyset$, es decir, que $A_n \searrow \emptyset$ implique $\mu(A_n) \to 0$. Damos el enunciado completo a continuación; véase Ash [**?**, Teorema 1.2.8(b)] o Dudley [**?**, Teorema 3.1.1].

Proposición 1.15. *Sea μ una función finitamente aditiva sobre el álgebra $\mathscr{A}$. Supongamos que toda sucesión $\{A_n\}$ en $\mathscr{A}$ satisface*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \ y \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mu(A_n) \to 0. \tag{4}$$

Entonces μ es numerablemente aditiva sobre $\mathscr{A}$, es decir, μ es una medida sobre el álgebra $\mathscr{A}$.

Notemos que (4) es equivalente a la siguiente condición: para toda sucesión decreciente $\{A_n\}$ en el álgebra $\mathscr{A}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) > 0 \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset. \tag{5}$$

Observación 1.16. La condición (4) se llama *Axioma de continuidad* en la monografía de Kolmogorov [**?**, Axioma VI, p. 14].

Necesitamos el siguiente lema, que es una ligera modificación de un método para probar resultados de *compacidad secuencial* en probabilidad y análisis real; véase Billingsley [**?**, A14, p. 573] o Rudin [**?**, Teorema 7.23].

Lema 1.17 (El método diagonal)**.** *Sean $\{n_j\} \subseteq \mathbb{N}$ y $\{y_j : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n_j} \mid j \in \mathbb{N}\}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, supongamos que $\{y_j(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^{n_j}$. Entonces existen enteros $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ tales que $\lim_{l\to\infty} y_j(k_l)$ existe para todo $j \in \mathbb{N}$.*

También requerimos una propiedad de *regularidad* de las medidas de probabilidad sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; véase Ash [**?**, Teorema 1.4.11(a)].

Lema 1.18. *Sea P una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe un conjunto compacto $C \subseteq B$ tal que*

$$P(B \setminus C) < \varepsilon.$$

Teorema 1.19 (Teorema de extensión de Kolmogorov)**.** *Para cada t en el conjunto de índices no vacío T, sea $\Omega_t = \mathbb{R}$ con la σ-álgebra de Borel $\mathscr{F}_t = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Para cada $\tau \in \mathscr{T}$, sea P_τ una medida de probabilidad sobre $\mathscr{F}_\tau$. Si la familia $\{P_\tau \mid \tau \in \mathscr{T}\}$ es consistente, entonces existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}$ sobre $\mathscr{F}$ tal que, para cada $\tau \in \mathscr{T}$,*

$$\mathbb{P}(B_\infty) = P_\tau(B), \qquad \forall B \in \mathscr{F}_\tau.$$

Demostración. Por la Proposición 1.13, la función $\mathbb{P} : \mathscr{F}_\infty \to [0,1]$ dada por

$$\mathbb{P}(B_\infty) := P_\tau(B), \qquad B \in \mathscr{F}_\tau,$$

está bien definida y es finitamente aditiva.

Probaremos que $\mathbb{P}$ es en efecto una medida sobre el álgebra $\mathscr{F}_\infty$, verificando primero que se cumple (5). Sea $\{A_\infty^{(k)}\} \subseteq \mathscr{F}_\infty$ una sucesión decreciente tal que

$$\varepsilon := \inf_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_\infty^{(k)}) > 0.$$

Entonces existe una sucesión $\{\eta_k\} \subseteq \mathscr{T}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\eta_k \subseteq \eta_{k+1}$$

y

$$A_\infty^{(k)} = (B_k)_\infty$$

para algún $B_k \in \mathscr{F}_{\eta_k}$. Si n_k denota la cardinalidad del conjunto finito η_k, entonces

$$\Omega_{\eta_k} = \mathbb{R}^{n_k} \quad \text{y} \quad \mathscr{F}_{\eta_k} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_k}), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Por el Lema 1.18, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un conjunto compacto $C_k \subseteq B_k$ tal que

$$P_{\eta_k}(B_k \setminus C_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

y por tanto

$$\mathbb{P}\big((B_k)_\infty \setminus (C_k)_\infty\big) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Además, si $\widetilde{C}_\infty^{(k)} := (C_1)_\infty \cap \ldots \cap (C_k)_\infty$, entonces $\widetilde{C}_\infty^{(k)} \subseteq (C_k)_\infty \subseteq A_\infty^{(k)}$ y

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_\infty^{(k)} \setminus \widetilde{C}_\infty^{(k)}) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{k} [A_\infty^{(k)} \cap (C_j)_\infty^c]\Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_\infty^{(k)} \setminus (C_j)_\infty) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_\infty^{(j)} \setminus (C_j)_\infty) \\
&< \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbb{P}(A_\infty^{(k)}) - \mathbb{P}(\widetilde{C}_\infty^{(k)}) < \varepsilon/2$ implica $\mathbb{P}(\widetilde{C}_\infty^{(k)}) > 0$, y así

$$\widetilde{C}_\infty^{(k)} \neq \emptyset \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, escojamos un elemento $x^{(k)} \in \widetilde{C}_\infty^{(k)}$, es decir, $x^{(k)} : T \to \mathbb{R}$ tal que

$$x_{\eta_j}^{(k)} \in C_j, \qquad j \leq k.$$

Fijemos $j \in \mathbb{N}$ y consideremos la sucesión $\{x_{\eta_j}^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^{n_j}$. Notemos que $x_{\eta_j}^{(k)} \in C_j$ para todo $k \geq j$. Como C_j es acotado en $\mathbb{R}^{n_j}$ y los términos con $k < j$ son finitos, la sucesión $\{x_{\eta_j}^{(k)}\}$ es acotada para cada j. Usamos ahora el Lema 1.17 para hallar enteros $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ tales que

$$x_{\eta_j} := \lim_{l \to \infty} x_{\eta_j}^{(k_l)}$$

existe para todo $j \in \mathbb{N}$ y, claramente, x_{η_j} pertenece al cerrado C_j. Notemos también que

$$i < j \quad \Rightarrow \quad (x_{\eta_j})_{\eta_i} = x_{\eta_i}$$

porque $(x_{\eta_j}^{(k_l)})_{\eta_i} = x_{\eta_i}^{(k_l)}$ para todo $l \geq j$. Escojamos un elemento $x \in \Omega$ y sea

$$x^\infty(t) := \begin{cases} x(t) & \text{si } t \notin \bigcup_{j=1}^\infty \eta_j, \\ (x_{\eta_j})_{\{t\}} & \text{si } t \in \eta_j. \end{cases}$$

Así, $x^\infty = (x^\infty(t);\, t \in T)$ satisface

$$(x^\infty)_{\eta_j} = x_{\eta_j} \in C_j, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto $x^\infty \in (C_j)_\infty \subseteq A_\infty^{(j)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y entonces $\bigcap_{j=1}^\infty A_\infty^{(j)} \neq \emptyset$. Esto prueba la condición (5), que es equivalente a (4). Por la Proposición 1.15, $\mathbb{P}$ es una medida sobre el álgebra $\mathscr{F}_\infty$. Finalmente, la conclusión se sigue del teorema de extensión de Carathéodory (Teorema 1.14). □

Cuando $T = \mathbb{R}_+$, cada $\tau \in \mathscr{T}$ es un conjunto finito de números reales y se ordena de manera natural, $\tau = \{t_1 < \cdots < t_n\}$; escribimos entonces $P_\tau = \mu_{t_1,\ldots,t_n}$. Con esta identificación, la consistencia de la Definición 1.12 es precisamente la condición (1). Así, el Teorema 1.19 produce el resultado anunciado en la Subsección 1.2: sobre $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}), \mathbb{P})$, el proceso $X_t(\omega) = \omega(t)$ tiene distribuciones finito-dimensionales $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$.

1.3. Construcción de procesos estocásticos

Teorema 1.20 (Existencia de procesos con distribuciones prescritas)**.** *Sean $T \subseteq \mathbb{R}$ y, para cada conjunto finito $\tau \subseteq T$, sea $F_\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de distribución. Supongamos que cada F_τ, con $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$, satisface*

$$\lim_{x_j \to \infty} F_\tau(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = F_{\tau \setminus \{t_j\}}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n). \tag{6}$$

Entonces existe un proceso estocástico $\{X_t,\ t \in T\}$, sobre algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tal que

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega \mid X_{t_1}(\omega) \leq x_1, \ldots, X_{t_n}(\omega) \leq x_n] = F_\tau(x_1, \ldots, x_n), \tag{7}$$

donde $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$.

Demostración. Cada F_τ determina una única medida de probabilidad P_τ sobre $(\mathbb{R}^{|\tau|}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{|\tau|}))$. La condición (6) implica que sus marginales coinciden con las medidas correspondientes a los subconjuntos de τ; por tanto, $\{P_\tau\}$ es consistente. El Teorema 1.19 proporciona una probabilidad sobre $\mathbb{R}^T$. Las proyecciones coordenadas $X_t(\omega) = \omega(t)$ tienen las distribuciones prescritas. □

Ejemplo 1.21 (Procesos de conteo)**.** Supongamos que ciertos eventos (llegadas de clientes a un banco o llamadas a un conmutador) ocurren en instantes aleatorios $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ tales que $T_n \to \infty$ casi seguramente. Sea

$$N_t = \#\{n \geq 1 \mid T_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[T_n \leq t]}, \qquad t \geq 0,$$

el número de eventos ocurridos hasta el tiempo t. El proceso $(N_t)_{t\geq 0}$ se llama **proceso de conteo**. Sus trayectorias son funciones escalonadas, no decrecientes, continuas por la derecha, con valores en $\mathbb{N}_0$ y saltos de tamaño 1. El ejemplo más importante es el proceso de Poisson (Sección 2).

Corolario 1.22. *Sea $\{F_n\}$ una sucesión de funciones de distribución unidimensionales. Entonces existen un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias independientes, definidas sobre Ω, tales que*

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \leq x] = F_n(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Para cada $\eta = \{n_1 < \cdots < n_k\}$, definimos

$$F_\eta(x_1, \ldots, x_k) = F_{n_1}(x_1) \cdots F_{n_k}(x_k).$$

Entonces usamos el Corolario 1.20 para obtener la sucesión requerida. □

El siguiente ejemplo, tomado de Shiryaev [**?**, p. 304], es una aplicación directa del corolario anterior.

Ejemplo 1.23 (Procesos de renovación)**.** Sea $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ una función de distribución tal que $F(0) = 0$ y $0 < m := \mathbb{E}[\xi_1] < \infty$, donde ξ_1 tiene distribución F. Entonces, por el Corolario 1.22, existen una sucesión $\{\xi_n\}$ de variables aleatorias i.i.d. y un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tales que

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \leq x] = F(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sean $T_0 \equiv 0$ y

$$T_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $t \geq 0$, sea

$$R_t(\omega) := \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid T_n(\omega) \leq t\}, \qquad \omega \in \Omega.$$

El proceso estocástico $\{R_t,\ t \geq 0\}$ se conoce como *proceso de renovación*; cuando cada ξ_n tiene distribución exponencial, se obtiene un *proceso de Poisson*.

Los procesos de renovación satisfacen la siguiente *Ley de los grandes números* (LGN):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = \frac{1}{m} \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}, \tag{8}$$

donde $m = \mathbb{E}[\xi_1]$. En efecto, por la LGN,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = m \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

y, además,

$$\lim_{t\to\infty} R_t = \infty \quad \mathbb{P}\text{-c.s.},$$

porque $T_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n \to \infty$ $\mathbb{P}$-c.s. cuando $n \to \infty$. Por otro lado, para cada t, $R_t = N$ si y sólo si $T_N \leq t < T_{N+1}$, así que

$$\frac{T_{R_t}}{R_t} \leq \frac{t}{R_t} < \frac{T_{R_t+1}}{R_t+1}\,\frac{R_t+1}{R_t}$$

y, haciendo $t \to \infty$, $t/R_t \to m$ $\mathbb{P}$-c.s. y se sigue (8).

1.4. Modificaciones y continuidad

El teorema de extensión de Kolmogorov garantiza la existencia de procesos con distribuciones finito-dimensionales prescritas, pero no asegura la continuidad de sus trayectorias. El siguiente ejemplo muestra esta limitación.

Ejemplo 1.24. Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0,1]$ y consideremos los procesos

$$X_t = 0 \qquad \text{y} \qquad Y_t = \mathbf{1}_{[U=t]}, \qquad t \in [0,1].$$

Para cada t fijo, $\mathbb{P}[X_t \neq Y_t] = \mathbb{P}[U = t] = 0$. Por lo tanto, para cualesquiera $t_1 < \cdots < t_n$,

$$\mathbb{P}\big[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})\big] \;\geq\; 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[U = t_k] = 1,$$

de modo que X y Y tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales. Sin embargo, todas las trayectorias de X son continuas, mientras que *ninguna* trayectoria de Y lo es: cada una tiene una discontinuidad removible en el punto $U(\omega)$. Además,

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,1]} X_t = 0\Big] = 1, \qquad \mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,1]} Y_t = 1\Big] = 1.$$

El Ejemplo 1.24 motiva dos nociones de igualdad entre procesos definidos en un mismo espacio de probabilidad.

Definición 1.25. Sean $X = (X_t)_{t\geq 0}$ y $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ procesos definidos en el mismo espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Y es una **modificación** (o versión) de X si $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1$ para todo $t \geq 0$.

(b) X y Y son **indistinguibles** si existe $N \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(N) = 0$ tal que

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ y todo } \omega \notin N.$$

Es claro que si X y Y son indistinguibles, entonces Y es una modificación de X, y que si Y es una modificación de X, entonces $X \overset{d}{=} Y$ (vea el Ejercicio 4.1). En el Ejemplo 1.24, Y es una modificación de X, pero no son indistinguibles. El siguiente resultado muestra que esto no puede pasar si las trayectorias son regulares.

Proposición 1.26. *Sean X y Y procesos definidos en el mismo espacio de probabilidad, cuyas trayectorias son continuas por la derecha. Si Y es una modificación de X, entonces X y Y son indistinguibles.*

Demostración. Sea $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$ y consideremos el evento

$$N = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}_+} [X_q \neq Y_q].$$

Como N es una unión numerable de eventos de probabilidad cero, $\mathbb{P}(N) = 0$. Sea $\omega \notin N$, de modo que $X_q(\omega) = Y_q(\omega)$ para todo racional $q \geq 0$. Dado $t \geq 0$, tomemos una sucesión de racionales $q_n \downarrow t$. Por la continuidad por la derecha de las trayectorias,

$$X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{q_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y_{q_n}(\omega) = Y_t(\omega).$$

Así, $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo $t \geq 0$ y todo $\omega \notin N$. □

Un criterio de continuidad. Dado un proceso construido con el teorema de Kolmogorov, ¿cómo conseguir una modificación con trayectorias continuas? El siguiente criterio da una condición suficiente que sólo involucra las distribuciones de los incrementos, es decir, que puede verificarse *antes* de conocer la regularidad de las trayectorias.

Teorema 1.27 (Criterio de continuidad de Kolmogorov–Chentsov)**.** *Sea $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ un proceso real y supongamos que existen constantes $\alpha, \beta, C > 0$ tales que*

$$\mathbb{E}\big[|X_t - X_s|^\alpha\big] \leq C\,|t-s|^{1+\beta}, \qquad s,t \in [0,1]. \tag{9}$$

Entonces X tiene una modificación $\widetilde{X}$ cuyas trayectorias son continuas. Más aún, para todo $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$, las trayectorias de $\widetilde{X}$ son Hölder continuas de orden γ: existe una variable aleatoria K_γ, finita casi seguramente, tal que

$$|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s| \leq K_\gamma\,|t-s|^\gamma, \qquad s,t \in [0,1].$$

Demostración. Sea $D_n = \{k2^{-n} \mid k = 0,1,\ldots,2^n\}$ y $D = \bigcup_{n\geq 0} D_n$ el conjunto de los diádicos de $[0,1]$. Fijemos $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$.

Paso 1: cota sobre los diádicos. Sea

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} \Big[\, |X_{k2^{-n}} - X_{(k-1)2^{-n}}| > 2^{-\gamma n}\Big].$$

Por la desigualdad de Markov y (9),

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{k=1}^{2^n} 2^{\gamma\alpha n}\,\mathbb{E}\big[|X_{k2^{-n}} - X_{(k-1)2^{-n}}|^\alpha\big] \leq 2^n \cdot 2^{\gamma\alpha n} \cdot C\,2^{-n(1+\beta)} = C\,2^{-n(\beta-\gamma\alpha)}.$$

Como $\gamma < \beta/\alpha$, la serie $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge. Por el lema de Borel–Cantelli, el evento $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \limsup_n A_n$ tiene probabilidad uno. Para $\omega \in \Omega_\gamma$ existe $N(\omega)$ tal que, para todo $n \geq N(\omega)$ y todo $k = 1,\ldots,2^n$,

$$|X_{k2^{-n}}(\omega) - X_{(k-1)2^{-n}}(\omega)| \leq 2^{-\gamma n}.$$

Paso 2: continuidad de Hölder sobre D. Fijemos $\omega \in \Omega_\gamma$ y $N = N(\omega)$. Para $s \in D$ y $n \geq 0$ sea $s_n = \max\{u \in D_n \mid u \leq s\}$. Entonces $s_n = s$ para n suficientemente grande y $s_{n+1} - s_n \in \{0, 2^{-(n+1)}\}$, así que $X_{s_{n+1}} - X_{s_n}$ es cero o es la diferencia de X en dos puntos consecutivos de D_{n+1}. Para $n \geq N$ resulta

$$|X_s - X_{s_n}| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-\gamma j} = \frac{2^{-\gamma(n+1)}}{1-2^{-\gamma}}. \tag{10}$$

Sean ahora $s < t$ en D con $t - s < 2^{-N}$ y escojamos $m \geq N$ con $2^{-(m+1)} \leq t - s < 2^{-m}$. Como $t_m \leq t < s + 2^{-m} < s_m + 2 \cdot 2^{-m}$ y $t_m, s_m \in D_m$, se tiene $t_m - s_m \in \{0, 2^{-m}\}$, de modo que $|X_{t_m} - X_{s_m}| \leq 2^{-\gamma m}$. Por (10),

$$|X_t - X_s| \leq |X_t - X_{t_m}| + |X_{t_m} - X_{s_m}| + |X_{s_m} - X_s| \leq 2^{-\gamma m} \, \frac{1 + 2^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}}.$$

Como $2^{-\gamma m} \leq 2^{\gamma}(t-s)^{\gamma}$, concluimos que

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq c_\gamma \, |t - s|^{\gamma}, \qquad s, t \in D, \ |t - s| < 2^{-N(\omega)}, \tag{11}$$

con $c_\gamma = 2^{\gamma}\,(1 + 2^{-\gamma})/(1 - 2^{-\gamma})$. En particular, $t \mapsto X_t(\omega)$ es uniformemente continua sobre D.

Paso 3: la modificación. Sea $\Omega_0 = \bigcap_{k \geq 1} \Omega_{\gamma_k}$, donde $\gamma_k \uparrow \beta/\alpha$; entonces $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ y $\Omega_0 \in \mathcal{F}$. Para $\omega \in \Omega_0$ y $t \in [0,1]$ definimos

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \lim_{\substack{s \to t \\ s \in D}} X_s(\omega),$$

que existe por la continuidad uniforme sobre D del Paso 2; para $\omega \notin \Omega_0$ ponemos $\widetilde{X}_t(\omega) = 0$. Cada $\widetilde{X}_t$ es una variable aleatoria, pues es el límite puntual de $X_{s_n} \mathbf{1}_{\Omega_0}$ con $s_n \in D$, $s_n \to t$. Por (11), las trayectorias de $\widetilde{X}$ son continuas y, pasando al límite, satisfacen la misma cota de Hölder para $|t - s| < 2^{-N(\omega)}$. Para $|t - s| \geq 2^{-N(\omega)}$ se tiene $|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s| \leq 2 \sup_u |\widetilde{X}_u| \leq 2 \sup_u |\widetilde{X}_u| \, 2^{\gamma N} |t - s|^{\gamma}$, lo que da la cota global con K_γ finita casi seguramente. Como esta construcción se realiza simultáneamente para una sucesión $\gamma_k \uparrow \beta/\alpha$, y una cota Hölder de orden γ_k implica otra de orden $\gamma < \gamma_k$ en $[0,1]$, la misma modificación sirve para todo $\gamma < \beta/\alpha$.

Finalmente, probemos que $\widetilde{X}$ es una modificación de X. Fijemos $t \in [0,1]$ y tomemos $s_n \in D$ con $s_n \to t$. Por (9), $\mathbb{E}|X_{s_n} - X_t|^{\alpha} \leq C |s_n - t|^{1+\beta} \to 0$, así que $X_{s_n} \to X_t$ en probabilidad. Por construcción, $X_{s_n} \to \widetilde{X}_t$ casi seguramente. Por la unicidad (casi segura) del límite en probabilidad, $\widetilde{X}_t = X_t$ casi seguramente. $\square$

Observación 1.28. Si el proceso está indexado por $\mathbb{R}_+$ y la cota (9) se cumple sobre cada intervalo $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ (con una constante C_n que puede depender de n), el teorema, aplicado a $t \mapsto X_{nt}$, produce una modificación continua $\widetilde{X}^{(n)}$ en $[0, n]$. Por la Proposición 1.26, $\widetilde{X}^{(n+1)}$ y $\widetilde{X}^{(n)}$ son indistinguibles en $[0, n]$, así que las modificaciones se pegan en una modificación continua definida en todo $\mathbb{R}_+$. Además, por la Proposición 1.26, dos modificaciones continuas del mismo proceso son indistinguibles: la modificación continua es única salvo indistinguibilidad.

1.5. Procesos gaussianos

Definición 1.29. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso con $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$ para todo t. Su **función de media** y su **función de covarianza** son, respectivamente,

$$m(t) = \mathbb{E}[X_t], \qquad C(s,t) = \operatorname{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}\big[(X_s - m(s))(X_t - m(t))\big], \qquad s, t \geq 0.$$

Proposición 1.30. *La función de covarianza C de un proceso es simétrica, $C(s,t) = C(t,s)$, y **definida no negativa**: para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j \, a_k \, C(t_j, t_k) \ \geq \ 0.$$

Demostración. La simetría es inmediata de la definición. Para la segunda afirmación, por la bilinealidad de la covarianza,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j \, a_k \, C(t_j, t_k) = \operatorname{Cov}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j X_{t_j}, \sum_{k=1}^{n} a_k X_{t_k} \Big) = \operatorname{Var}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j X_{t_j} \Big) \ \geq \ 0. \qquad \square$$

Recordemos que un vector aleatorio $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ es **gaussiano** (o normal multivariado) si toda combinación lineal $a_1 Z_1 + \cdots + a_n Z_n$ tiene distribución normal (admitiendo varianza cero, es decir, constantes). Si Z es gaussiano con vector de medias m y matriz de covarianzas Σ, su función característica es

$$\mathbb{E}[e^{\,i\langle u, Z\rangle}] = \exp\Big(i\langle u, m\rangle - \tfrac{1}{2}\, u^\top \Sigma\, u\Big), \qquad u \in \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

de modo que la distribución de Z queda determinada por m y Σ, y escribimos $Z \sim N(m, \Sigma)$. En particular, las componentes de un vector gaussiano son independientes si y sólo si no están correlacionadas, es decir, si Σ es diagonal.

Definición 1.31. Un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es **gaussiano** si para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $t_1, \dots, t_n \geq 0$ el vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ es gaussiano.

Proposición 1.32. *Las distribuciones finito-dimensionales de un proceso gaussiano quedan determinadas por sus funciones de media m y de covarianza C. En particular, dos procesos gaussianos con la misma media y la misma covarianza son iguales en distribución.*

Demostración. Sean $t_1 < \cdots < t_n$. El vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ es gaussiano, con vector de medias $(m(t_1), \dots, m(t_n))$ y matriz de covarianzas $\Sigma = [C(t_j, t_k)]_{j,k=1}^n$. Por (12), su función característica, y por lo tanto su distribución, sólo depende de m y de C. □

El recíproco también es cierto: cualquier función simétrica y definida no negativa es la covarianza de algún proceso gaussiano.

Teorema 1.33. *Sean $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función cualquiera y $C : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función simétrica y definida no negativa. Entonces existe un proceso gaussiano con función de media m y función de covarianza C.*

Idea de la demostración. Para $t_1 < \cdots < t_n$ definimos $\mu_{t_1,\dots,t_n}$ como la distribución normal $N(m_{\mathbf{t}}, \Sigma_{\mathbf{t}})$, con $m_{\mathbf{t}} = (m(t_1), \dots, m(t_n))$ y $\Sigma_{\mathbf{t}} = [C(t_j, t_k)]$; esta matriz es simétrica y definida no negativa, así que tal distribución existe. Si eliminamos la coordenada k de un vector $N(m_{\mathbf{t}}, \Sigma_{\mathbf{t}})$, obtenemos un vector gaussiano cuya media y covarianza se obtienen al borrar la entrada k de $m_{\mathbf{t}}$, y la fila y la columna k de $\Sigma_{\mathbf{t}}$. Por lo tanto la familia es consistente y basta aplicar el Teorema 1.19, identificando cada conjunto finito $\tau = \{t_1 < \cdots < t_n\}$ con $P_\tau = \mu_{t_1,\dots,t_n}$. □

Ejemplo 1.34. La función $C(s,t) = \min\{s,t\}$, para $s, t \geq 0$, es definida no negativa. En efecto, $\min\{s,t\} = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,s]}(u)\, \mathbf{1}_{[0,t]}(u)\, du$, de modo que

$$\sum_{j,k} a_j a_k \min\{t_j, t_k\} = \int_0^\infty \Big(\sum_j a_j \mathbf{1}_{[0,t_j]}(u)\Big)^2 du \;\geq\; 0.$$

Por el Teorema 1.33, existe un proceso gaussiano centrado con covarianza $\min\{s,t\}$. El siguiente ejemplo construye una modificación continua mediante el Teorema 1.27.

Ejemplo 1.35. Sea X el proceso gaussiano centrado con covarianza $C(s,t) = \min\{s,t\}$ construido con el teorema de Kolmogorov (Ejemplo 1.34). Para $s < t$, la variable $X_t - X_s$ es normal centrada con varianza

$$\operatorname{Var}(X_t - X_s) = t + s - 2\min\{s,t\} = t - s,$$

de modo que, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\big[|X_t - X_s|^{2k}\big] = (2k-1)!!\, |t-s|^k.$$

Tomando $\alpha = 2k$ y $\beta = k-1$ en el Teorema 1.27 (con $k \geq 2$), obtenemos una modificación continua de X con trayectorias Hölder continuas de todo orden $\gamma < \frac{k-1}{2k}$. Como k es arbitrario y la modificación continua es única salvo indistinguibilidad, las trayectorias son Hölder continuas de todo orden $\gamma < \frac{1}{2}$. Una modificación de un proceso gaussiano tiene las mismas distribuciones finito-dimensionales y, por lo tanto, es gaussiana con la misma media y covarianza. Esta modificación continua es el **movimiento browniano**, que estudiaremos en la Sección 3.

Definición 1.36. Un proceso $X = (X_t)_{t\geq 0}$ es **estacionario** si para todo $h \geq 0$ el proceso trasladado $(X_{t+h})_{t\geq 0}$ tiene las mismas distribuciones finito-dimensionales que X. Si $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$, decimos que X es **débilmente estacionario** si $m(t)$ es constante y $C(s,t)$ sólo depende de $t-s$.

Todo proceso estacionario con segundos momentos finitos es débilmente estacionario. Por la Proposición 1.32, para procesos gaussianos ambas nociones coinciden. El proceso del Ejemplo 1.2 es débilmente estacionario (Ejercicio 4.2); una cadena de Markov que comienza en su distribución estacionaria es un proceso estacionario a tiempo discreto.

1.6. Filtraciones y martingalas

Para estudiar martingalas necesitamos la esperanza condicional con respecto a una σ-álgebra. Recordamos aquí, sin demostración, la definición y sus propiedades principales; vea Brzeźniak y Zastawniak [2, Cap. 2] o Brémaud [1].

Definición 1.37. Sea X una variable aleatoria integrable y sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra. La **esperanza condicional** de X dado $\mathcal{G}$ es la (única, salvo igualdad casi segura) variable aleatoria $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ tal que

(a) $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ es $\mathcal{G}$-medible, y

(b) $\mathbb{E}\big[X\,\mathbf{1}_A\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\,\mathbf{1}_A\big]$ para todo $A \in \mathcal{G}$.

Intuitivamente, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ es la mejor predicción de X con la información contenida en $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G} = \sigma\{B_1, B_2, \dots\}$ es generada por una partición numerable de Ω con $\mathbb{P}(B_k) > 0$, entonces

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \sum_k \frac{\mathbb{E}[X\,\mathbf{1}_{B_k}]}{\mathbb{P}(B_k)}\,\mathbf{1}_{B_k},$$

lo cual coincide con la noción elemental de esperanza condicional dado un evento.

Proposición 1.38 (Propiedades de la esperanza condicional)**.** *Sean X, Y variables aleatorias integrables, $a, b \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub-σ-álgebras. Entonces, casi seguramente:*

(a) Linealidad: $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\,\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\,\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$.

(b) Esperanza total: $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}[X]$.

(c) Lo conocido sale: *si Z es $\mathcal{G}$-medible y ZX es integrable, entonces* $\mathbb{E}[ZX \mid \mathcal{G}] = Z\,\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$. *En particular,* $\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{G}] = Z$.

(d) Independencia: *si X es independiente de $\mathcal{G}$, entonces* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

(e) Torre: $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}\big] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}]$.

(f) Monotonía: *si $X \leq Y$, entonces* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$.

Filtraciones y tiempos de paro. Como en tiempo discreto, una **filtración** es una familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$. La σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ representa la información disponible hasta el tiempo t. La **filtración natural** de un proceso X es

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s \mid 0 \leq s \leq t\}. \tag{13}$$

Decimos que X es **adaptado** a $\{\mathcal{F}_t\}$ si X_t es $\mathcal{F}_t$-medible para todo $t \geq 0$. Todo proceso es adaptado a su filtración natural.

Definición 1.39. Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración. Una variable aleatoria $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ es un **tiempo de paro** con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$ si

$$[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t \qquad \text{para todo } t \geq 0.$$

Observación 1.40. En tiempo discreto, las condiciones $[T = n] \in \mathcal{F}_n$ para todo n y $[T \leq n] \in \mathcal{F}_n$ para todo n son equivalentes, pues $[T \leq n] = \bigcup_{k\leq n}[T = k]$. En tiempo continuo, el evento $[\tau = t]$ suele tener probabilidad cero y no es útil; por eso la definición se formula con $[\tau \leq t]$.

Proposición 1.41. *Si σ y τ son tiempos de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$ y $c \geq 0$, entonces $\sigma \wedge \tau = \min\{\sigma,\tau\}$, $\sigma \vee \tau = \max\{\sigma,\tau\}$ y $\tau + c$ son tiempos de paro. Toda constante $\tau \equiv c$ es un tiempo de paro.*

Demostración. Para $t \geq 0$,

$$[\sigma \wedge \tau \leq t] = [\sigma \leq t] \cup [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, \qquad [\sigma \vee \tau \leq t] = [\sigma \leq t] \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t.$$

Además, $[\tau + c \leq t] = \emptyset$ si $t < c$, y $[\tau + c \leq t] = [\tau \leq t - c] \in \mathcal{F}_{t-c} \subseteq \mathcal{F}_t$ si $t \geq c$. Finalmente, si $\tau \equiv c$, entonces $[\tau \leq t]$ es $\emptyset$ o Ω, que pertenecen a $\mathcal{F}_t$. □

Ejemplo 1.42 (Tiempo de llegada a un conjunto cerrado)**.** Sea X un proceso con trayectorias continuas, adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$, y sea $F \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado. El **tiempo de llegada** a F,

$$\tau_F = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in F\} \qquad (\inf \emptyset = \infty),$$

es un tiempo de paro. Para verlo, sea $d(x,F) = \inf\{|x - y| \mid y \in F\}$ la distancia de x a F, que es una función continua de x, y sea $D_t = (\mathbb{Q} \cap [0,t]) \cup \{t\}$. Afirmamos que

$$[\tau_F \leq t] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q\in D_t} \Big[d(X_q, F) < \tfrac{1}{n}\Big], \tag{14}$$

que pertenece a $\mathcal{F}_t$, pues es una combinación numerable de eventos de $\mathcal{F}_t$.

En efecto, si $\tau_F(\omega) = s \leq t$, por la continuidad de la trayectoria y como F es cerrado, $X_s(\omega) \in F$. Dado n, por continuidad existe $q \in D_t$ cercano a s con $d(X_q(\omega), F) < 1/n$. Recíprocamente, si ω pertenece al lado derecho de (14), existen $q_n \in [0,t]$ con $d(X_{q_n}(\omega), F) < 1/n$; tomando una subsucesión convergente $q_{n_k} \to s \in [0,t]$, la continuidad implica $d(X_s(\omega), F) = 0$, es decir, $X_s(\omega) \in F$. Luego $\tau_F(\omega) \leq s \leq t$.

Definición 1.43. Un proceso $(M_t)_{t\geq 0}$ es una **martingala** con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ si

(a) M es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$,

(b) $\mathbb{E}|M_t| < \infty$ para todo $t \geq 0$, y

(c) $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ casi seguramente, para cualesquiera $0 \leq s \leq t$.

La propiedad (c) dice que, dada la información hasta el tiempo s, la mejor predicción del valor futuro M_t es el valor presente M_s. Tomando esperanzas en (c) y usando la Proposición 1.38(b) obtenemos que una martingala tiene media constante:

$$\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0], \qquad t \geq 0.$$

Diremos que un proceso X adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$ tiene **incrementos independientes con respecto a** $\{\mathcal{F}_t\}$ si $X_t - X_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ para cualesquiera $0 \leq s < t$. Si $\{\mathcal{F}_t\}$ es la filtración natural de X y X_0 es constante, esta propiedad es equivalente a la Definición 1.5(a) (lo aceptaremos sin demostración).

Proposición 1.44. *Sea X un proceso con incrementos independientes con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$ y tal que $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ para todo t. Entonces*

$$M_t = X_t - \mathbb{E}[X_t], \qquad t \geq 0,$$

es una martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$.

Demostración. Claramente M es adaptado e integrable. Sean $0 \leq s \leq t$. Como X_s es $\mathcal{F}_s$-medible y $X_t - X_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, la Proposición 1.38 da

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= X_s + \mathbb{E}[X_t - X_s] \\ &= X_s + \mathbb{E}[X_t] - \mathbb{E}[X_s].\end{aligned}$$

Restando $\mathbb{E}[X_t]$ en ambos lados obtenemos $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$. □

Definición 1.45 (Proceso de Markov)**.** Un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es **de Markov** si, para toda función f medible y acotada y cualesquiera $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s^X] = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_s] \quad \text{c.s.},$$

donde $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_u : 0 \leq u \leq s)$.

Observación 1.46. Todo proceso con incrementos independientes es de Markov. En particular, el movimiento browniano y el proceso de Poisson son procesos de Markov.

Resumen de la Sección 1

- El Teorema de existencia (Teorema 1.20) permite construir procesos a partir de familias consistentes de distribuciones.
- La continuidad de las trayectorias requiere condiciones adicionales; el criterio de Kolmogorov–Chentsov (Teorema 1.27) proporciona una condición suficiente.
- Un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es **gaussiano** si todos sus vectores finito-dimensionales $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ son gaussianos, es decir, si toda combinación lineal de sus componentes tiene distribución normal.
- Un proceso $(M_t)_{t\geq 0}$ es una **martingala** respecto de una filtración $(\mathcal{F}_t)$ si es adaptado, integrable y satisface

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s \quad \text{c.s.}, \qquad 0 \leq s \leq t.$$

- Un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es un **proceso de Markov** si, para $0 \leq s < t$, la distribución condicional de X_t dada $\mathcal{F}_s^X$ depende únicamente de X_s.

2. El proceso de Poisson

El proceso de Poisson es el modelo más sencillo para contar eventos que ocurren "completamente al azar" en el tiempo: llamadas que llegan a un conmutador, clientes que llegan a una ventanilla, accidentes en una carretera. Seguimos de cerca la presentación de Brzeźniak y Zastawniak [2, Cap. 6], que construye el proceso a partir de tiempos entre llegadas exponenciales.

2.1. Construcción mediante tiempos de llegada

Recordemos que una variable aleatoria ξ tiene **distribución exponencial** con parámetro $\lambda > 0$, y escribimos $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$, si su densidad es

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\, \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t).$$

En tal caso, $\mathbb{P}[\xi > t] = e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\xi] = 1/\lambda$ y $\text{Var}(\xi) = 1/\lambda^2$.

Proposición 2.1 (Pérdida de memoria)**.** *Sea ξ una variable aleatoria con valores en $(0,\infty)$ y $\mathbb{P}[\xi > t] > 0$ para todo $t \geq 0$. Entonces ξ tiene distribución exponencial si y sólo si*

$$\mathbb{P}[\xi > t + s \mid \xi > s] = \mathbb{P}[\xi > t], \qquad s, t \geq 0. \tag{15}$$

Demostración. Si $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$, entonces

$$\mathbb{P}[\xi > t + s \mid \xi > s] = \frac{\mathbb{P}[\xi > t+s]}{\mathbb{P}[\xi > s]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}[\xi > t].$$

Recíprocamente, sea $G(t) = \mathbb{P}[\xi > t]$. La igualdad (15) equivale a

$$G(t+s) = G(t)\, G(s), \qquad s, t \geq 0.$$

Como $G(t) > 0$, podemos definir $g(t) = \ln G(t)$, que satisface $g(t+s) = g(t) + g(s)$. Por inducción, $g(nt) = n\, g(t)$ para $n \in \mathbb{N}$, y de aquí $g(m/n) = \frac{m}{n}\, g(1)$ para todo racional $m/n > 0$. Sea $\lambda = -g(1)$; como G es no creciente y $G(1) \leq 1$, se tiene $\lambda \geq 0$. Si $t > 0$ y $q_k \downarrow t$ son racionales, la continuidad por la derecha de G da

$$g(t) = \lim_{k\to\infty} g(q_k) = -\lambda \lim_{k\to\infty} q_k = -\lambda t.$$

Así, $G(t) = e^{-\lambda t}$. Finalmente, $\lambda > 0$, pues si $\lambda = 0$ tendríamos $\mathbb{P}[\xi > t] = 1$ para todo t, lo cual contradice que $\xi < \infty$. □

La propiedad (15) dice que si un foco con tiempo de vida exponencial sigue funcionando al tiempo s, la probabilidad de que dure t unidades adicionales es la misma que para un foco nuevo: el foco "no envejece".

Lema 2.2 (Sumas de exponenciales)**.** *Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con distribución* $\text{Exp}(\lambda)$ *y sea $T_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Entonces T_n tiene distribución* $\text{Gamma}(n, \lambda)$*, es decir, su densidad es*

$$f_n(t) = \lambda e^{-\lambda t}\, \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ es la densidad exponencial. Supongamos que T_n tiene densidad f_n. Como $T_{n+1} = T_n + \xi_{n+1}$, con T_n y ξ_{n+1} independientes, la densidad de T_{n+1} es la convolución: para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) &= \int_0^t f_n(s)\, \lambda e^{-\lambda(t-s)}\, ds \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}\, \lambda e^{-\lambda(t-s)}\, ds \\ &= \lambda^{n+1} e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\, ds = \lambda e^{-\lambda t}\, \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

□

Definición y distribución del proceso.

Definición 2.3. Sean $\xi_1, \xi_2, \dots$ variables aleatorias independientes con distribución $\text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Sean

$$T_0 = 0, \qquad T_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

El **proceso de Poisson** con intensidad (o tasa) λ es el proceso de conteo

$$N_t = \text{máx}\{n \geq 0 \mid T_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[T_n \leq t]}, \qquad t \geq 0. \tag{17}$$

Las variables T_n se llaman **tiempos de llegada** y las $\xi_n = T_n - T_{n-1}$ **tiempos entre llegadas**.

Así, $N_t = n$ si y sólo si $T_n \leq t < T_{n+1}$; es decir, N_t cuenta el número de llegadas ocurridas en el intervalo $(0, t]$.

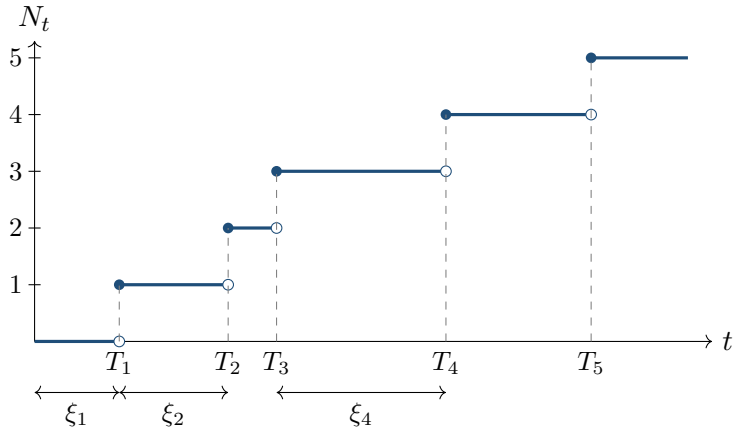


Figura 1: Una trayectoria del proceso de Poisson. Las trayectorias son continuas por la derecha, con límites por la izquierda y saltos de tamaño 1 en los tiempos de llegada.

Proposición 2.4. *Casi seguramente, $T_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. En consecuencia, $N_t < \infty$ para todo $t \geq 0$, casi seguramente, y cada trayectoria $t \mapsto N_t(\omega)$ es no decreciente, continua por la derecha, con valores en $\mathbb{N}_0$ y saltos de tamaño 1.*

Demostración. Por la ley fuerte de los grandes números, $T_n/n \to \mathbb{E}[\xi_1] = 1/\lambda > 0$ casi seguramente, de modo que $T_n \to \infty$ casi seguramente. Si $T_n(\omega) \to \infty$, para cada t sólo hay un número finito de índices n con $T_n(\omega) \leq t$, es decir, $N_t(\omega) < \infty$. Además, como los ξ_n tienen densidad, $\mathbb{P}[\xi_n = 0] = 0$ y, casi seguramente, $0 < T_1 < T_2 < \cdots$; por lo tanto los saltos son de tamaño 1. La continuidad por la derecha se sigue de que $[T_n \leq t]$ está definido con desigualdad no estricta: si $T_n \leq t < T_{n+1}$, entonces $N_u = n$ para todo $u \in [t, T_{n+1})$. □

Teorema 2.5. *Para cada $t > 0$, N_t tiene distribución de Poisson con parámetro λt:*

$$\mathbb{P}[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{18}$$

En particular, $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ y $\text{Var}(N_t) = \lambda t$.

Demostración. Para $n = 0$, $\mathbb{P}[N_t = 0] = \mathbb{P}[T_1 > t] = \mathbb{P}[\xi_1 > t] = e^{-\lambda t}$. Sea $n \geq 1$. Notemos que $[N_t \geq n] = [T_n \leq t]$ y que $[T_{n+1} \leq t] \subseteq [T_n \leq t]$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}[N_t = n] = \mathbb{P}[N_t \geq n] - \mathbb{P}[N_t \geq n+1] = \mathbb{P}[T_n \leq t] - \mathbb{P}[T_{n+1} \leq t] = \int_0^t \left(f_n(s) - f_{n+1}(s)\right) ds,$$

donde f_n es la densidad (16). Ahora bien, por la regla del producto,

$$\frac{d}{ds}\Big(e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}\Big) = -\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!} + \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} = f_n(s) - f_{n+1}(s).$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\mathbb{P}[N_t = n] = \Big[e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}\Big]_{s=0}^{s=t} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Los valores de la media y la varianza son los de la distribución de Poisson (vea el Ejercicio 4.6). □

El parámetro $\lambda = \mathbb{E}[N_t]/t$ es el número promedio de llegadas por unidad de tiempo, lo cual justifica el nombre de *intensidad*.

Ejemplo 2.6 (Llamadas a un conmutador)**.** Las llamadas a un conmutador llegan de acuerdo con un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 3$ llamadas por hora. Midiendo el tiempo en horas:

- La probabilidad de que no lleguen llamadas en los primeros 20 minutos es $\mathbb{P}[N_{1/3} = 0] = e^{-3\cdot\frac{1}{3}} = e^{-1} \approx 0{,}368$.
- La probabilidad de que lleguen exactamente 2 llamadas en la primera hora es $\mathbb{P}[N_1 = 2] = e^{-3}\frac{3^2}{2!} \approx 0{,}224$.
- El tiempo esperado hasta la quinta llamada es $\mathbb{E}[T_5] = 5\,\mathbb{E}[\xi_1] = 5/3$ horas, es decir, 100 minutos.

2.2. Incrementos y caracterización del proceso

La propiedad más importante del proceso de Poisson es que el número de llegadas en intervalos disjuntos son independientes, y que el número de llegadas en un intervalo sólo depende de su longitud.

Teorema 2.7. *Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson con intensidad λ. Para cualesquiera $s, t \geq 0$ y $k, m \in \mathbb{N}_0$,*

$$\mathbb{P}[N_s = k,\ N_{s+t} - N_s = m] = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}. \tag{19}$$

En particular, $N_{s+t} - N_s$ tiene distribución de Poisson con parámetro λt y es independiente de N_s.

Demostración. Hacemos la demostración en el caso $k \geq 1$, $m \geq 2$; los casos restantes son similares y más sencillos (vea el Ejercicio 4.8). Notemos que

$$[N_s = k,\ N_{s+t} - N_s = m] = [N_s = k,\ N_{s+t} = k+m] = [T_k \leq s < T_{k+1},\ T_{k+m} \leq s+t < T_{k+m+1}].$$

Escribamos

$$T_{k+1} = T_k + \xi, \qquad T_{k+m} = T_k + \xi + R, \qquad T_{k+m+1} = T_k + \xi + R + \eta,$$

donde $\xi = \xi_{k+1}$, $R = \xi_{k+2} + \cdots + \xi_{k+m}$ y $\eta = \xi_{k+m+1}$. Las variables T_k, ξ, R, η son independientes, con densidades f_k, $\lambda e^{-\lambda x}$, f_{m-1} y $\lambda e^{-\lambda y}$, respectivamente (Lema 2.2). El evento de interés es

$$\big[\, T_k \leq s,\ \ T_k + \xi > s,\ \ T_k + \xi + R \leq s + t,\ \ \eta > s + t - (T_k + \xi + R) \,\big].$$

Integrando primero con respecto a η, que aporta el factor $e^{-\lambda(s+t-u-x-r)}$, obtenemos

$$\mathbb{P}[N_s = k,\ N_{s+t} = k+m] = \iiint_A f_k(u)\,\lambda e^{-\lambda x}\, f_{m-1}(r)\, e^{-\lambda(s+t-u-x-r)}\, du\, dx\, dr,$$

donde $A = \{(u,x,r) \mid 0 \le u \le s,\ x > s-u,\ x+r \le s+t-u,\ r \ge 0\}$. Usando (16), el integrando es igual a

$$e^{-\lambda(s+t)} \cdot \frac{\lambda^k u^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda \cdot \frac{\lambda^{m-1} r^{m-2}}{(m-2)!},$$

que no depende de x. Para u y r fijos, la variable x recorre el intervalo $(s-u,\ s+t-u-r]$, de longitud $t-r$ (que es positiva si y sólo si $r < t$). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N_s = k,\ N_{s+t} = k+m] &= e^{-\lambda(s+t)}\,\lambda^{k+m} \int_0^s \frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\,du \int_0^t \frac{r^{m-2}}{(m-2)!}\,(t-r)\,dr \\ &= e^{-\lambda(s+t)}\,\lambda^{k+m}\,\frac{s^k}{k!}\,\frac{t^m}{m!},\end{aligned}$$

pues $\int_0^t r^{m-2}(t-r)\,dr = t^m(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}) = \frac{t^m}{m(m-1)}$. Esto es (19).

Sumando (19) sobre $k \in \mathbb{N}_0$ se obtiene que $N_{s+t} - N_s$ tiene distribución de Poisson con parámetro λt. Entonces (19) dice que $\mathbb{P}[N_s = k,\ N_{s+t} - N_s = m] = \mathbb{P}[N_s = k]\,\mathbb{P}[N_{s+t} - N_s = m]$, es decir, N_s y $N_{s+t} - N_s$ son independientes. □

Con un argumento similar, aunque con más notación, se demuestra el caso general; vea Brzeźniak y Zastawniak [2, Cap. 6].

Teorema 2.8. *El proceso de Poisson con intensidad λ tiene incrementos independientes y estacionarios: para cualesquiera $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, las variables*

$$N_{t_1} - N_{t_0},\ N_{t_2} - N_{t_1},\ \ldots,\ N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

son independientes y $N_{t_j} - N_{t_{j-1}}$ tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda(t_j - t_{j-1})$.

Observación 2.9. La existencia del proceso de Poisson también puede establecerse mediante el teorema de extensión de Kolmogorov, a partir de sus distribuciones finito-dimensionales, determinadas por incrementos independientes con distribución Poisson$(\lambda(t-s))$.

Ejemplo 2.10. Con los datos del Ejemplo 2.6, calculemos la probabilidad de que lleguen 2 llamadas en la primera hora y 5 en las primeras tres horas. Por el Teorema 2.7,

$$\mathbb{P}[N_1 = 2,\ N_3 = 5] = \mathbb{P}[N_1 = 2]\,\mathbb{P}[N_3 - N_1 = 3] = e^{-3}\frac{3^2}{2!} \cdot e^{-6}\frac{6^3}{3!} \approx 0{,}224 \cdot 0{,}089 \approx 0{,}020.$$

Observación 2.11 (Tiempo de espera residual). Fijemos un tiempo $t \ge 0$ y sea $W_t = T_{N_t+1} - t$ el tiempo que hay que esperar, a partir de t, hasta la siguiente llegada. Como $[W_t > u] = [N_{t+u} - N_t = 0]$, el Teorema 2.7 da

$$\mathbb{P}[W_t > u] = e^{-\lambda u}, \qquad u \ge 0.$$

Es decir, sin importar cuánto tiempo haya pasado desde la última llegada, el tiempo de espera hasta la siguiente es Exp(λ). Esto es una manifestación de la pérdida de memoria (Proposición 2.1).

Ejemplo 2.12 (La paradoja de la inspección)**.** Los autobuses llegan a una parada según un proceso de Poisson con intensidad λ, de modo que el tiempo promedio entre dos autobuses consecutivos es $1/\lambda$. Un pasajero llega a la parada al tiempo fijo $t > 0$. Sea $A_t = t - T_{N_t}$

el tiempo transcurrido desde el último autobús y $W_t = T_{N_t+1} - t$ el tiempo que tendrá que esperar. Por la Observación 2.11, $\mathbb{E}[W_t] = 1/\lambda$. Por otro lado, para $0 \le u < t$,

$$\mathbb{P}[A_t > u] = \mathbb{P}[N_t - N_{t-u} = 0] = e^{-\lambda u},$$

y $\mathbb{P}[A_t > u] = 0$ si $u \ge t$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[A_t] = \int_0^\infty \mathbb{P}[A_t > u]\, du = \int_0^t e^{-\lambda u}\, du = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Así, la longitud del intervalo entre autobuses que contiene al instante t tiene media

$$\mathbb{E}[A_t + W_t] = \frac{2 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \;\longrightarrow\; \frac{2}{\lambda}, \qquad t \to \infty,$$

que es casi el doble de $1/\lambda$. La "paradoja" se explica porque es más probable que el pasajero llegue durante un intervalo largo que durante uno corto.

Caracterización infinitesimal. El Teorema 2.8 sugiere una definición alternativa del proceso de Poisson que no hace referencia a los tiempos entre llegadas. La siguiente caracterización muestra por qué el proceso de Poisson aparece de manera natural en las aplicaciones: basta suponer que las llegadas ocurren de manera "homogénea", "sin memoria" y "de una en una". Escribimos $o(h)$ para denotar una función g tal que $g(h)/h \to 0$ cuando $h \downarrow 0$.

Teorema 2.13. *Sea $(N_t)_{t\ge 0}$ un proceso de conteo con $N_0 = 0$ y con incrementos independientes y estacionarios. Supongamos que, para algún $\lambda > 0$,*

$$\mathbb{P}[N_h = 1] = \lambda h + o(h), \qquad \mathbb{P}[N_h \ge 2] = o(h), \qquad h \downarrow 0. \tag{20}$$

Entonces N_t tiene distribución de Poisson con parámetro λt, para todo $t \ge 0$. En consecuencia, (N_t) tiene las mismas distribuciones finito-dimensionales que el proceso de Poisson de la Definición 2.3.

Demostración. Sea $p_n(t) = \mathbb{P}[N_t = n]$. De (20), $p_0(h) = 1 - \lambda h + o(h)$. Por la independencia y estacionariedad de los incrementos,

$$p_0(t+h) = \mathbb{P}[N_t = 0,\ N_{t+h} - N_t = 0] = p_0(t)\, p_0(h) = p_0(t)\big(1 - \lambda h + o(h)\big).$$

Luego

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda\, p_0(t) + \frac{o(h)}{h}\, p_0(t) \;\longrightarrow\; -\lambda\, p_0(t), \qquad h \downarrow 0.$$

Así, $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$ (derivada por la derecha) con $p_0(0) = 1$, de donde $p_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Sea ahora $n \ge 1$. Descomponiendo según el valor de $N_{t+h} - N_t$,

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}[N_t = n - j]\, \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = j] \\ &= p_n(t)\, p_0(h) + p_{n-1}(t)\, p_1(h) + \sum_{j=2}^{n} p_{n-j}(t)\, \mathbb{P}[N_h = j] \\ &= p_n(t)\big(1 - \lambda h\big) + p_{n-1}(t)\, \lambda h + o(h), \end{aligned}$$

pues la última suma está acotada por $\mathbb{P}[N_h \ge 2] = o(h)$. Dividiendo entre h y haciendo $h \downarrow 0$ obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$p_n'(t) = -\lambda\, p_n(t) + \lambda\, p_{n-1}(t), \qquad p_n(0) = 0, \qquad n \ge 1. \tag{21}$$

Sea $q_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$. Entonces (21) se convierte en $q_n'(t) = \lambda\, q_{n-1}(t)$, con $q_0(t) = 1$ y $q_n(0) = 0$. Por inducción,

$$q_n(t) = \int_0^t \lambda \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds = \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

es decir, $p_n(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!$. La última afirmación se sigue de la Proposición 1.6, pues ambos procesos tienen incrementos independientes con las mismas distribuciones. □

Recíprocamente, el proceso de Poisson de la Definición 2.3 satisface (20), pues

$$\mathbb{P}[N_h = 1] = \lambda h\, e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \qquad \mathbb{P}[N_h \geq 2] = 1 - e^{-\lambda h} - \lambda h\, e^{-\lambda h} = o(h).$$

Las ecuaciones (21) son un caso particular de las *ecuaciones de Kolmogorov* para cadenas de Markov en tiempo continuo.

2.3. Martingalas y operaciones con procesos de Poisson

Sea $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtración natural del proceso de Poisson. Por el Teorema 2.8, $N_t - N_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ para $s < t$ (aceptamos este hecho, que se sigue de la independencia de los incrementos).

Proposición 2.14. *Sea (N_t) un proceso de Poisson con intensidad λ. Entonces el* ***proceso de Poisson compensado***

$$M_t = N_t - \lambda t$$

es una martingala, y también lo es $M_t^2 - \lambda t$.

Demostración. Como $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$, la primera afirmación se sigue de la Proposición 1.44. Para la segunda, sean $s < t$. Escribamos $M_t = M_s + (M_t - M_s)$, donde M_s es $\mathcal{F}_s$-medible y $M_t - M_s = (N_t - N_s) - \lambda(t-s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, con media 0 y varianza $\mathrm{Var}(N_t - N_s) = \lambda(t-s)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\big[M_s^2 + 2M_s(M_t - M_s) + (M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\big] \\
&= M_s^2 + 2M_s\, \mathbb{E}[M_t - M_s] + \mathbb{E}\big[(M_t - M_s)^2\big] \\
&= M_s^2 + \lambda(t-s).
\end{aligned}$$

Restando λt en ambos lados, $\mathbb{E}[M_t^2 - \lambda t \mid \mathcal{F}_s] = M_s^2 - \lambda s$. La integrabilidad es clara, pues N_t tiene momentos de todos los órdenes. □

Superposición, adelgazamiento y tiempos de llegada.

Proposición 2.15 (Superposición)**.** *Sean (N_t^1) y (N_t^2) procesos de Poisson independientes con intensidades λ_1 y λ_2. Entonces $N_t = N_t^1 + N_t^2$ tiene incrementos independientes y $N_t - N_s$ tiene distribución de Poisson con parámetro $(\lambda_1 + \lambda_2)(t-s)$. Es decir, N es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda_1 + \lambda_2$.*

Demostración. Los incrementos de N sobre intervalos disjuntos son sumas de incrementos de N^1 y de N^2 sobre esos intervalos; como todos estos son independientes entre sí, los incrementos de N son independientes. Basta entonces ver que si $X \sim \text{Poisson}(a)$ y $Y \sim \text{Poisson}(b)$ son independientes, $X + Y \sim \text{Poisson}(a+b)$. En efecto, por el teorema del binomio,

$$\mathbb{P}[X+Y=n] = \sum_{k=0}^{n} e^{-a}\frac{a^k}{k!}\, e^{-b}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(a+b)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = e^{-(a+b)}\frac{(a+b)^n}{n!}. \qquad \square$$

Proposición 2.16 (Adelgazamiento)**.** *Sea (N_t) un proceso de Poisson con intensidad λ y sea $p \in (0,1)$. Supongamos que cada llegada, independientemente de todo lo demás, es de* tipo 1 *con probabilidad p y de* tipo 2 *con probabilidad $1-p$. Sean N_t^1 y N_t^2 el número de llegadas de tipo 1 y de tipo 2 en $(0,t]$. Entonces, para cada t, N_t^1 y N_t^2 son independientes, con distribuciones de Poisson con parámetros $\lambda p\, t$ y $\lambda(1-p)\, t$, respectivamente.*

Demostración. Sean $k, m \in \mathbb{N}_0$. Dado $N_t = k+m$, el número de llegadas de tipo 1 tiene distribución binomial con parámetros $k+m$ y p. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N_t^1 = k,\ N_t^2 = m] &= \mathbb{P}[N_t = k+m]\binom{k+m}{k} p^k (1-p)^m \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k+m}}{(k+m)!} \cdot \frac{(k+m)!}{k!\, m!}\, p^k (1-p)^m \\ &= e^{-\lambda p t}\frac{(\lambda p t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^m}{m!},\end{aligned}$$

donde usamos $e^{-\lambda t} = e^{-\lambda p t} e^{-\lambda(1-p)t}$. Esta es la distribución conjunta de dos variables de Poisson independientes con los parámetros indicados. □

Ejemplo 2.17. A una tienda llegan clientes según un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 20$ por hora. Cada cliente realiza una compra con probabilidad 0,3, independientemente de los demás. Por la Proposición 2.16, el número de clientes que compran en una hora tiene distribución de Poisson con parámetro 6, y es independiente del número de clientes que no compran, que tiene distribución de Poisson con parámetro 14.

Finalmente, veamos qué se puede decir sobre los tiempos de llegada si sabemos cuántas llegadas hubo en $[0,t]$.

Proposición 2.18. *Sea (N_t) un proceso de Poisson y sea $t > 0$. Condicionado al evento $[N_t = 1]$, el tiempo de la única llegada T_1 tiene distribución uniforme en $[0,t]$:*

$$\mathbb{P}[T_1 \le s \mid N_t = 1] = \frac{s}{t}, \qquad 0 \le s \le t.$$

Demostración. Si $0 \le s \le t$, entonces $[T_1 \le s,\ N_t = 1] = [N_s = 1,\ N_t - N_s = 0]$. Por el Teorema 2.7,

$$\mathbb{P}[T_1 \le s \mid N_t = 1] = \frac{\mathbb{P}[N_s = 1]\,\mathbb{P}[N_t - N_s = 0]}{\mathbb{P}[N_t = 1]} = \frac{\lambda s\, e^{-\lambda s}\, e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t\, e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}.$$ □

Más generalmente, se puede demostrar que, condicionado a $[N_t = n]$, el vector $(T_1, \ldots, T_n)$ tiene la misma distribución que los estadísticos de orden de n variables independientes uniformes en $[0,t]$ [7]. En este sentido, las llegadas de un proceso de Poisson están "distribuidas completamente al azar" en el tiempo.

Resumen de la Sección 2

Sea (N_t) un proceso de Poisson con intensidad λ.

- **Construcción** (Definición 2.3): $N_t = \max\{n \mid T_n \le t\}$, con $T_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ y ξ_k independientes $\mathrm{Exp}(\lambda)$; la exponencial es la única distribución sin memoria (Proposición 2.1) y $T_n \sim \mathrm{Gamma}(n, \lambda)$ (Lema 2.2).
- **Distribución de Poisson** (Teorema 2.5):

$$\mathbb{P}[N_t = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad \mathbb{E}[N_t] = \mathrm{Var}(N_t) = \lambda t.$$

- **Incrementos independientes y estacionarios** (Teoremas 2.7 y 2.8): $N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$, independiente del pasado.
- **Martingalas** (Proposición 2.14): $N_t - \lambda t$ y $(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$.
- **Superposición y adelgazamiento** (Proposiciones 2.15 y 2.16): se obtienen de nuevo procesos de Poisson.
- **Llegadas uniformes** (Proposición 2.18): dado $N_t = 1$, $T_1 \sim U[0,t]$.

3. Movimiento browniano

En 1827 el botánico R. Brown observó al microscopio que los granos de polen suspendidos en agua se mueven de manera incesante e irregular. En 1905 A. Einstein explicó este fenómeno como el resultado de los choques de las moléculas del líquido con las partículas, y en 1923 N. Wiener dio la primera construcción matemáticamente rigurosa del proceso que hoy llamamos *movimiento browniano* o *proceso de Wiener*. Además de la física, este proceso es fundamental en finanzas, biología e ingeniería, y es el punto de partida del cálculo estocástico. Seguimos a Brzeźniak y Zastawniak [2, Cap. 6].

3.1. Definición y construcción

Sea $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ la caminata aleatoria simple del Ejemplo 1.3, con $\mathbb{P}[\xi_k = \pm 1] = \frac{1}{2}$. Supongamos que una partícula da un paso de longitud δ cada $1/n$ unidades de tiempo. Su posición al tiempo t es $\delta\, S_{\lfloor nt \rfloor}$, cuya varianza es $\delta^2 \lfloor nt \rfloor \approx \delta^2 nt$. Para obtener un límite no trivial cuando $n \to \infty$ debemos tomar $\delta = 1/\sqrt{n}$. Consideramos entonces

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\, S_{\lfloor nt \rfloor}, \qquad t \geq 0.$$

- Para $t > 0$ fijo, por el Teorema central del límite,

$$X_t^{(n)} = \sqrt{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} \cdot \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \xrightarrow{d} N(0,t), \qquad n \to \infty.$$

- Si $s < t$, los incrementos $X_s^{(n)}$ y $X_t^{(n)} - X_s^{(n)}$ dependen de bloques disjuntos de las variables ξ_k, así que son independientes, y $X_t^{(n)} - X_s^{(n)} \xrightarrow{d} N(0, t-s)$.
- Los saltos de $X^{(n)}$ son de tamaño $1/\sqrt{n} \to 0$, lo que sugiere que el proceso límite tiene trayectorias continuas.

Estas tres observaciones motivan la siguiente definición. (El *principio de invariancia de Donsker* hace riguroso el paso al límite; vea [1].)

Definición 3.1. Un proceso estocástico $W = (W_t)_{t \geq 0}$ es un **movimiento browniano** (estándar, unidimensional), o **proceso de Wiener**, si

(a) $W_0 = 0$ casi seguramente;

(b) W tiene incrementos independientes;

(c) para $0 \leq s < t$, el incremento $W_t - W_s$ tiene distribución normal $N(0, t-s)$;

(d) casi todas las trayectorias $t \mapsto W_t(\omega)$ son continuas.

Notemos que (c) implica que W tiene incrementos estacionarios. En particular, $W_t \sim N(0,t)$, es decir,

$$\mathbb{P}[W_t \in B] = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-x^2/(2t)}\, dx, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ t>0.$$

Recordemos también cómo se obtiene la covarianza a partir de la definición. Si $0 \le s \le t$, como $W_s = W_s - W_0$ casi seguramente y los incrementos $W_s - W_0$ y $W_t - W_s$ son independientes,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(W_s, W_t) &= \mathbb{E}[W_s(W_s + W_t - W_s)] \\ &= \mathbb{E}[W_s^2] + \mathbb{E}[W_s]\,\mathbb{E}[W_t - W_s] = s.\end{aligned}$$

Por simetría, $\operatorname{Cov}(W_s, W_t) = \min\{s,t\}$. En el Ejemplo 1.34 vimos, además, que esta función es definida no negativa: para cualesquiera $t_1, \dots, t_n \ge 0$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \min\{t_j, t_k\} = \int_0^\infty \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{1}_{[0,t_j]}(u) \Big)^2 du \ge 0.$$

Esta propiedad permitirá construir el proceso en el siguiente teorema.

Teorema 3.2 (Wiener)**.** *Existe un espacio de probabilidad en el que está definido un movimiento browniano.*

Demostración. Por el Ejemplo 1.34 y el Teorema 1.33, existe un proceso gaussiano centrado X con covarianza $C(s,t) = \min\{s,t\}$. Para $0 \le s < t$,

$$X_t - X_s \sim N(0, t-s), \qquad \mathbb{E}[|X_t - X_s|^4] = 3(t-s)^2.$$

Por el criterio de Kolmogorov–Chentsov, aplicado en cada intervalo compacto, X admite una modificación continua W en $[0,\infty)$. Como las modificaciones tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales, W es gaussiano centrado con covarianza C. En particular, $W_0 = 0$ casi seguramente y $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.

Sean $0 \le t_0 < \cdots < t_n$ y $D_j = W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$. El vector $(D_1, \dots, D_n)$ es gaussiano y, para $j < k$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(D_j, D_k) &= C(t_j, t_k) - C(t_j, t_{k-1}) \\ &\quad - C(t_{j-1}, t_k) + C(t_{j-1}, t_{k-1}) \\ &= t_j - t_j - t_{j-1} + t_{j-1} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, los incrementos son conjuntamente independientes. Como las trayectorias de W son continuas, W es un movimiento browniano. □

Otra construcción, debida a P. Lévy, define W en $[0,1]$ como límite uniforme de interpolaciones lineales en los puntos diádicos; vea Brémaud [1] o Brzeźniak y Zastawniak [2, Cap. 6]. Por la Proposición 1.6, todos los movimientos brownianos tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales.

3.2. Estructura gaussiana e invariancias

Teorema 3.3. *Un proceso $W = (W_t)_{t\ge 0}$ con trayectorias continuas es un movimiento browniano si y sólo si es un proceso gaussiano con*

$$\mathbb{E}[W_t] = 0 \qquad y \qquad \operatorname{Cov}(W_s, W_t) = \min\{s,t\}, \qquad s,t \ge 0.$$

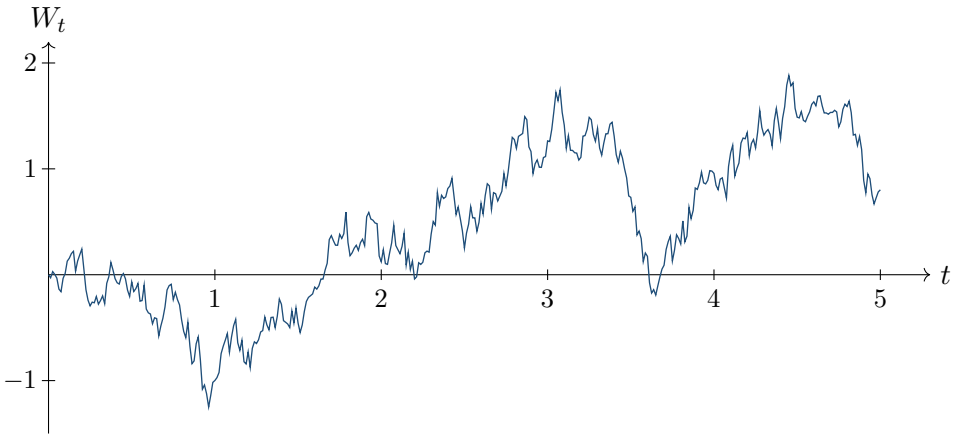


Figura 2: Una trayectoria (simulada) del movimiento browniano en $[0, 5]$.

Demostración. Supongamos que W es un movimiento browniano. Como sus incrementos son independientes y normales, sus distribuciones finito-dimensionales son gaussianas. Además, $\mathbb{E}[W_t] = 0$ y, como vimos anteriormente,

$$\operatorname{Cov}(W_s, W_t) = \min\{s, t\}.$$

Recíprocamente, supongamos que W es un proceso gaussiano centrado con covarianza $\min\{s, t\}$ y trayectorias continuas. El argumento utilizado en la demostración del Teorema 3.2 muestra que $W_0 = 0$ casi seguramente y que sus incrementos son independientes, con

$$W_t - W_s \sim N(0, t - s), \qquad 0 \le s < t.$$

Por tanto, W es un movimiento browniano. □

Ejemplo 3.4. Calculemos la distribución de $W_1 + W_2$. Por el Teorema 3.3, $W_1 + W_2$ es normal y centrada, con varianza

$$\operatorname{Var}(W_1 + W_2) = \operatorname{Var}(W_1) + \operatorname{Var}(W_2) + 2\operatorname{Cov}(W_1, W_2) = 1 + 2 + 2 \cdot 1 = 5.$$

Así, $W_1 + W_2 \sim N(0, 5)$ y, por ejemplo, $\mathbb{P}[W_1 + W_2 > 2] = 1 - \Phi(2/\sqrt{5}) \approx 0{,}186$, donde Φ es la función de distribución normal estándar. Otra manera de verlo es escribir $W_1 + W_2 = 2W_1 + (W_2 - W_1)$, suma de dos normales independientes con varianzas 4 y 1.

Corolario 3.5 (Ley de los grandes números)**.** *Si W es un movimiento browniano, entonces $W_t/t \to 0$ casi seguramente cuando $t \to \infty$.*

Demostración. Sean $\xi_k = W_k - W_{k-1}$, $k \ge 1$. Son variables i.i.d. con media cero y varianza uno. Por la ley fuerte, $W_n/n = (\xi_1 + \cdots + \xi_n)/n \to 0$ casi seguramente. Además, para $n \le t \le n+1$,

$$\frac{|W_t|}{t} \le \frac{|W_n|}{n} + \frac{\sup_{0 \le u \le 1} |W_{n+u} - W_n|}{n}.$$

Los supremos del numerador tienen la misma distribución que $M = \sup_{0 \le u \le 1} |W_u|$, con $\mathbb{E}[M^2] \le 4\mathbb{E}[W_1^2] = 4$ por la desigualdad maximal de Doob. Por Markov y Borel–Cantelli, dichos supremos divididos entre n convergen a cero casi seguramente. Se sigue el resultado. □

Propiedades de invariancia. El Teorema 3.3 es una herramienta muy eficiente para verificar que un proceso es un movimiento browniano: basta revisar que es gaussiano, centrado, con covarianza $\min\{s,t\}$ y trayectorias continuas.

Proposición 3.6. *Sea W un movimiento browniano. Entonces cada uno de los siguientes procesos es también un movimiento browniano:*

(a) Simetría: $X_t = -W_t$.

(b) Escalamiento: $X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} W_{ct}$, *donde $c > 0$ es una constante.*

(c) Traslación en el tiempo: $X_t = W_{s+t} - W_s$, *donde $s \geq 0$ es fijo.*

(d) Inversión del tiempo: $X_0 = 0$ *y* $X_t = t\, W_{1/t}$ *para* $t > 0$.

Demostración. En los cuatro casos, X es una transformación lineal de W, de modo que es gaussiano y centrado. Basta calcular covarianzas y revisar la continuidad. Sean $s, t \geq 0$.

(a) $\operatorname{Cov}(-W_s, -W_t) = \operatorname{Cov}(W_s, W_t) = \min\{s,t\}$, y las trayectorias son continuas.

(b) $\operatorname{Cov}\left(c^{-1/2}W_{cs}, c^{-1/2}W_{ct}\right) = \frac{1}{c}\min\{cs, ct\} = \min\{s,t\}$, y $t \mapsto W_{ct}$ es continua.

(c) Fijemos s y sean $u, t \geq 0$. Desarrollando,

$$\operatorname{Cov}(W_{s+u} - W_s,\ W_{s+t} - W_s) = \min\{s+u, s+t\} - s - s + s = \min\{u,t\}.$$

Las trayectorias son continuas.

(d) Para $s, t > 0$,

$$\operatorname{Cov}(sW_{1/s},\ tW_{1/t}) = st\, \min\{1/s, 1/t\} = \frac{st}{\max\{s,t\}} = \min\{s,t\}.$$

Las trayectorias son continuas en $(0,\infty)$. Para la continuidad en 0, el Corolario 3.5 da $W_u/u \to 0$ casi seguramente cuando $u \to \infty$; por tanto, $tW_{1/t} \to 0$ cuando $t \downarrow 0$. □

La propiedad (b) dice que el movimiento browniano es *autosimilar*: si observamos una trayectoria en el intervalo $[0,c]$ y reescalamos el tiempo por c y el espacio por $\sqrt{c}$, obtenemos de nuevo una trayectoria browniana. Esto explica el aspecto "fractal" de la Figura 2. La propiedad (c), junto con la independencia de los incrementos, dice que el movimiento browniano "vuelve a empezar" en cada tiempo fijo s, independientemente de su pasado; esta es la **propiedad de Markov** del movimiento browniano.

Ejemplo 3.7 (Proceso de Ornstein–Uhlenbeck)**.** Sea W un movimiento browniano y sea

$$U_t = e^{-t}\, W_{e^{2t}}, \qquad t \geq 0.$$

Entonces U es un proceso gaussiano centrado con trayectorias continuas y, para $s \leq t$,

$$\operatorname{Cov}(U_s, U_t) = e^{-s-t}\, \min\{e^{2s}, e^{2t}\} = e^{-s-t}e^{2s} = e^{-(t-s)}.$$

Como la covarianza sólo depende de $t - s$ y U es gaussiano, U es un proceso estacionario (Definición 1.36), con $U_t \sim N(0,1)$ para todo t. A diferencia del movimiento browniano, que se aleja de su punto de partida ($\operatorname{Var}(W_t) = t \to \infty$), el proceso de Ornstein–Uhlenbeck fluctúa alrededor de 0; se usa, por ejemplo, para modelar la velocidad de una partícula browniana o tasas de interés.

Ejemplo 3.8 (Movimiento browniano con deriva y movimiento browniano geométrico)**.** Sean $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. El proceso

$$X_t = \mu t + \sigma W_t$$

se llama movimiento browniano con *deriva* μ y *volatilidad* σ; tiene incrementos independientes y $X_t - X_s \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$. Su exponencial, $S_t = S_0\, e^{X_t}$ con $S_0 > 0$, se llama **movimiento browniano geométrico**. En el modelo de Black–Scholes, S_t representa el precio de una acción al tiempo t. Como $\mathbb{E}[e^Z] = e^{m+v/2}$ si $Z \sim N(m,v)$,

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0\, e^{(\mu+\sigma^2/2)t}.$$

3.3. Densidad de transición y martingalas

Por la Observación **??**, el movimiento browniano es un proceso de Markov. Si la partícula está en x al tiempo s, su posición al tiempo $s+t$ es $x+(W_{s+t}-W_s)$, con $W_{s+t}-W_s \sim N(0,t)$ independiente del pasado. El papel de las probabilidades de transición $q_n(x,y)$ de una cadena de Markov lo juega ahora la **densidad de transición**

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{2t}\Big), \qquad t>0,\ x,y\in\mathbb{R}, \tag{22}$$

en el sentido de que, para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}[x+W_t \in B] = \int_B p_t(x,y)\,dy.$$

Proposición 3.9. *La densidad de transición* (22) *satisface:*

(a) Ecuación de Chapman–Kolmogorov: *para* $s,t>0$ *y* $x,y\in\mathbb{R}$,

$$p_{s+t}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} p_s(x,z)\,p_t(z,y)\,dz.$$

(b) Ecuación del calor: *para* $t>0$ *y* $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial p_t}{\partial t}(x,y) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 p_t}{\partial y^2}(x,y).$$

Demostración. (a) Sean $D_1 = W_s$ y $D_2 = W_{s+t}-W_s$, independientes con distribuciones $N(0,s)$ y $N(0,t)$. La densidad de $x+D_1+D_2 = x+W_{s+t}$ es, por un lado, $p_{s+t}(x,\cdot)$ y, por otro, la convolución de las densidades de $x+D_1$ y de D_2, es decir, $\int p_s(x,z)\,p_t(z,y)\,dz$.

(b) Escribamos $u = y-x$. Derivando directamente,

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = p_t\Big(-\frac{1}{2t}+\frac{u^2}{2t^2}\Big), \qquad \frac{\partial p_t}{\partial y} = -\frac{u}{t}\,p_t, \qquad \frac{\partial^2 p_t}{\partial y^2} = p_t\Big(\frac{u^2}{t^2}-\frac{1}{t}\Big),$$

de donde se sigue la igualdad. □

La parte (a) es la versión continua de la igualdad $Q^{m+n} = Q^m Q^n$ para cadenas de Markov. La parte (b) tiene la siguiente consecuencia: si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es acotada y continua, la función

$$u(t,x) = \mathbb{E}[f(x+W_t)] = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,p_t(x,y)\,dy$$

satisface la ecuación del calor $\partial_t u = \frac{1}{2}\,\partial_{xx} u$ para $t>0$ (derivando bajo el signo integral y usando que $p_t(x,y)$ sólo depende de $y-x$), con la condición inicial $u(t,x)\to f(x)$ cuando $t\downarrow 0$. Esta conexión entre el movimiento browniano y las ecuaciones diferenciales parciales fue el punto de partida del trabajo de Einstein.

Martingalas brownianas. Sea $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtración natural de W. Para $s<t$, el incremento W_t-W_s es independiente de $\mathcal{F}_s$: por independencia de incrementos es independiente de cada vector $(W_{u_1},\dots,W_{u_n})$, con $u_j\le s$, y la afirmación se extiende a $\mathcal{F}_s$ mediante el argumento de clases monótonas.

Proposición 3.10. *Sea* W *un movimiento browniano y sea* $\sigma\in\mathbb{R}$. *Cada uno de los siguientes procesos es una martingala con respecto a* $\{\mathcal{F}_t\}$*:*

$$\textit{(a)}\ \ W_t, \qquad \textit{(b)}\ \ W_t^2 - t, \qquad \textit{(c)}\ \ \exp\Big(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}\,t\Big).$$

Demostración. Los tres procesos son adaptados e integrables (para (c), recuerde que $\mathbb{E}[e^{\sigma Z}] = e^{\sigma^2 v/2}$ si $Z \sim N(0, v)$). Sean $0 \le s < t$ y $D = W_t - W_s$, que es independiente de $\mathcal{F}_s$ y tiene distribución $N(0, t-s)$.

(a) Es consecuencia de la Proposición 1.44, pues $\mathbb{E}[W_t] = 0$.

(b) Usando la Proposición 1.38,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_t^2 \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_s^2 + 2W_s D + D^2 \mid \mathcal{F}_s] \\ &= W_s^2 + 2W_s\,\mathbb{E}[D] + \mathbb{E}[D^2] = W_s^2 + (t-s).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}[W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = W_s^2 - s$.

(c) Sea $Z_t = \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)$. Como $e^{\sigma W_s}$ es $\mathcal{F}_s$-medible,

$$\mathbb{E}[Z_t \mid \mathcal{F}_s] = e^{\sigma W_s - \sigma^2 t/2}\,\mathbb{E}\big[e^{\sigma D}\big] = e^{\sigma W_s - \sigma^2 t/2}\, e^{\sigma^2 (t-s)/2} = Z_s. \qquad \square$$

Las martingalas permiten calcular cantidades asociadas a tiempos de paro. Para ello usamos, sin demostración, la siguiente versión del teorema de paro opcional; vea [1] o [2, Cap. 6].

Teorema 3.11 (Paro opcional)**.** *Sea (M_t) una martingala con trayectorias continuas y sea τ un tiempo de paro con $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$. Si existe una constante K tal que $|M_{t\wedge\tau}| \le K$ para todo $t \ge 0$, entonces $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$. En efecto, el teorema de paro opcional para el tiempo acotado $t \wedge \tau$ da $\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau}] = \mathbb{E}[M_0]$; además, $M_{t\wedge\tau} \to M_\tau$ casi seguramente y la cota uniforme permite aplicar convergencia dominada.*

Ejemplo 3.12 (Ruina del jugador browniana)**.** Sean $a, b > 0$ y sea $\tau = \text{ínf}\{t \ge 0 \mid W_t \in \{-b, a\}\}$ el primer tiempo en que W sale del intervalo $(-b, a)$. Por el Ejemplo 1.42, τ es un tiempo de paro. Además $\tau < \infty$ casi seguramente: para cada n, el evento $[\tau > n]$ está contenido en $\bigcap_{k=1}^{n} \big[|W_k - W_{k-1}| < a + b\big]$, cuya probabilidad es p^n con $p = \mathbb{P}[|W_1| < a + b] < 1$.

Como $|W_{t\wedge\tau}| \le \text{máx}\{a, b\}$, el Teorema 3.11 aplicado a W da $\mathbb{E}[W_\tau] = 0$. Como $W_\tau \in \{-b, a\}$,

$$a\,\mathbb{P}[W_\tau = a] - b\,(1 - \mathbb{P}[W_\tau = a]) = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad \mathbb{P}[W_\tau = a] = \frac{b}{a+b}.$$

Este es el análogo continuo de la ruina del jugador para la caminata aleatoria simétrica. En el Ejercicio 4.21 se muestra, usando la martingala $W_t^2 - t$, que $\mathbb{E}[\tau] = ab$.

3.4. Trayectorias y principio de reflexión

Las trayectorias brownianas son continuas, pero extremadamente irregulares. Para medir esta irregularidad, consideremos una partición $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ de $[0, t]$ con norma $\|\Pi\| = \text{máx}_k(t_k - t_{k-1})$, y escribamos $\Delta_k W = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ y $\Delta_k t = t_k - t_{k-1}$.

Teorema 3.13 (Variación cuadrática)**.** *Sea (Π_n) una sucesión de particiones de $[0, t]$ con $\|\Pi_n\| \to 0$, y sea*

$$Q_n = \sum_k (\Delta_k W)^2$$

la suma correspondiente a Π_n. Entonces $\mathbb{E}\big[(Q_n - t)^2\big] \to 0$; es decir, $Q_n \to t$ en L^2.

Demostración. Fijemos n y escribamos $\Pi_n = \{t_0 < \cdots < t_m\}$. Como $\Delta_k W \sim N(0, \Delta_k t)$, se tiene $\mathbb{E}[(\Delta_k W)^2] = \Delta_k t$ y $\text{Var}\,((\Delta_k W)^2) = \mathbb{E}[(\Delta_k W)^4] - (\Delta_k t)^2 = 3(\Delta_k t)^2 - (\Delta_k t)^2 = 2(\Delta_k t)^2$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[Q_n] = \sum_{k=1}^{m} \Delta_k t = t,$$

y, como los incrementos son independientes, la varianza de la suma es la suma de las varianzas:

$$\mathbb{E}\big[(Q_n - t)^2\big] = \text{Var}(Q_n) = \sum_{k=1}^{m} 2(\Delta_k t)^2 \le 2\,\|\Pi_n\| \sum_{k=1}^{m} \Delta_k t = 2t\,\|\Pi_n\| \;\longrightarrow\; 0. \qquad \square$$

Para una función f con derivada continua en $[0,t]$, por el teorema del valor medio,

$$\sum_k \big(f(t_k) - f(t_{k-1})\big)^2 \le \max |f'|^2 \, \|\Pi\| \, t \;\longrightarrow\; 0.$$

El Teorema 3.13 muestra que las trayectorias brownianas se comportan de manera muy distinta: heurísticamente, $(dW_t)^2 = dt$. Esta igualdad es el origen de la fórmula de Itô del cálculo estocástico.

Corolario 3.14. *Casi todas las trayectorias del movimiento browniano tienen variación total infinita en $[0,t]$, para cada $t > 0$.*

Demostración. La convergencia en L^2 implica la convergencia en probabilidad, y de toda sucesión que converge en probabilidad se puede extraer una subsucesión que converge casi seguramente. Así, pasando a una subsucesión, podemos suponer que $Q_n \to t$ casi seguramente. Por otro lado,

$$Q_n = \sum_k (\Delta_k W)^2 \le \Big(\max_k |\Delta_k W|\Big) \sum_k |\Delta_k W| \le \Big(\max_k |\Delta_k W|\Big)\, V_t(\omega),$$

donde $V_t(\omega)$ es la variación total de la trayectoria en $[0,t]$. Por la continuidad uniforme de la trayectoria en $[0,t]$, $\max_k |\Delta_k W| \to 0$ cuando $\|\Pi_n\| \to 0$. Si fuera $V_t(\omega) < \infty$, tendríamos $Q_n(\omega) \to 0$, lo cual sólo ocurre en un conjunto de probabilidad cero, pues $Q_n \to t > 0$ casi seguramente. Aplicando el argumento a $t = 1/n$, $n \ge 1$, e intersectando los eventos de probabilidad uno, la conclusión vale simultáneamente para todo $t > 0$ por monotonía de la variación total. □

Como toda función monótona, o con derivada acotada, tiene variación total finita, el Corolario 3.14 implica que las trayectorias brownianas no son monótonas ni lipschitzianas en ningún intervalo: basta aplicar la misma conclusión a intervalos con extremos racionales, usando incrementos brownianos estacionarios y una intersección numerable de eventos de probabilidad uno. De hecho, se tiene el siguiente resultado, que enunciamos sin demostración.

Teorema 3.15 (Paley–Wiener–Zygmund)**.** *Casi todas las trayectorias del movimiento browniano no son diferenciables en ningún punto $t \ge 0$.*

Una versión más débil es fácil de ver. Fijemos $t \ge 0$ y $K > 0$. Por la Proposición 3.6(c), $W_{t+h} - W_t \sim N(0,h)$, de modo que, si $Z \sim N(0,1)$,

$$\mathbb{P}\Big[\Big|\frac{W_{t+h} - W_t}{h}\Big| \le K\Big] = \mathbb{P}\big[|Z| \le K\sqrt{h}\big] \;\longrightarrow\; 0, \qquad h \downarrow 0.$$

Es decir, el valor absoluto de los cocientes de diferencias tiende a infinito en probabilidad cuando $h \downarrow 0$.

El principio de reflexión. Sea $a > 0$ y sea $\tau_a = \inf\{t \ge 0 \mid W_t = a\}$ el tiempo de llegada al nivel a, que es un tiempo de paro (Ejemplo 1.42). Sea $M_t = \max_{0 \le s \le t} W_s$ el máximo de la trayectoria hasta el tiempo t. Por continuidad,

$$[\tau_a \le t] = [M_t \ge a].$$

Teorema 3.16 (Principio de reflexión)**.** *Para $a > 0$ y $t > 0$,*

$$\mathbb{P}[M_t \ge a] = 2\,\mathbb{P}[W_t \ge a] = \mathbb{P}\big[|W_t| \ge a\big].$$

Idea de la demostración. Como $\mathbb{P}[W_t = a] = 0$,

$$\mathbb{P}[M_t \geq a] = \mathbb{P}[M_t \geq a,\ W_t > a] + \mathbb{P}[M_t \geq a,\ W_t < a] = \mathbb{P}[W_t > a] + \mathbb{P}[\tau_a \leq t,\ W_t < a],$$

pues $[W_t > a] \subseteq [M_t \geq a]$. Admitimos sin demostración la *propiedad fuerte de Markov* del movimiento browniano: el proceso $(W_{\tau_a+u} - W_{\tau_a})_{u\geq 0}$ es un movimiento browniano independiente de lo ocurrido antes de τ_a. Por la simetría (Proposición 3.6(a)), una vez que la trayectoria toca el nivel a, es igualmente probable que al tiempo t esté por arriba o por abajo de a. Si reflejamos la trayectoria con respecto a la recta $y = a$ a partir del tiempo τ_a, obtenemos otra trayectoria browniana, y el evento $[\tau_a \leq t,\ W_t < a]$ se transforma en $[\tau_a \leq t,\ W_t > a] = [W_t > a]$. Así,

$$\mathbb{P}[\tau_a \leq t,\ W_t < a] = \mathbb{P}[W_t > a],$$

y se sigue el resultado. La última igualdad del enunciado es consecuencia de la simetría de W_t. Para una demostración completa, vea [1] o [3]. □

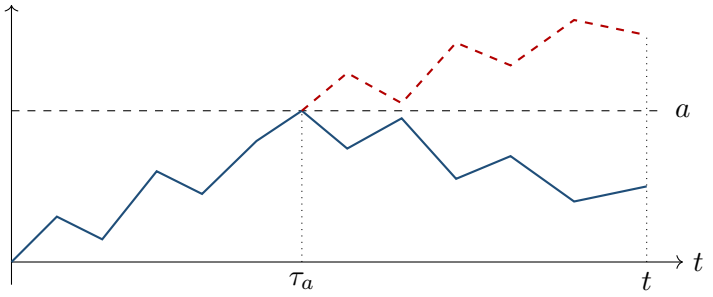


Figura 3: El principio de reflexión: a partir de τ_a, la trayectoria reflejada con respecto a $y = a$ (línea discontinua) es igualmente probable.

Corolario 3.17. *Sea $a > 0$. Entonces $\mathbb{P}[\tau_a < \infty] = 1$, pero $\mathbb{E}[\tau_a] = \infty$. Además, τ_a tiene densidad*

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-a^2/(2t)}, \qquad t > 0.$$

Demostración. Sea $Z \sim N(0,1)$. Por el Teorema 3.16 y como $W_t \overset{d}{=} \sqrt{t}\, Z$,

$$\mathbb{P}[\tau_a \leq t] = \mathbb{P}[M_t \geq a] = 2\,\mathbb{P}[Z \geq a/\sqrt{t}] = 2\int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx. \tag{23}$$

Haciendo $t \to \infty$, el lado derecho tiende a $2\,\mathbb{P}[Z \geq 0] = 1$, luego $\mathbb{P}[\tau_a < \infty] = 1$. Derivando (23) con respecto a t (regla de la cadena),

$$f_{\tau_a}(t) = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/(2t)} \cdot \frac{d}{dt}\Big(\frac{a}{\sqrt{t}}\Big) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-a^2/(2t)}.$$

Finalmente, para $t \geq a^2$ se tiene $e^{-a^2/(2t)} \geq e^{-1/2}$, de modo que

$$\mathbb{E}[\tau_a] = \int_0^{\infty} t\, f_{\tau_a}(t)\, dt \ \geq\ \frac{a\, e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{a^2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \infty.$$ □

El Corolario 3.17 dice que el movimiento browniano alcanza cualquier nivel con probabilidad 1, pero el tiempo esperado para hacerlo es infinito, exactamente como ocurre con la caminata aleatoria simple simétrica, que es recurrente nula.

Resumen de la Sección 3

Sea W un movimiento browniano.

- **Definición** (Definición 3.1): $W_0 = 0$, incrementos independientes, $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$, trayectorias continuas. Existe por el Teorema 3.2.
- **Proceso gaussiano** (Teorema 3.3): W es gaussiano, centrado, con
$$\operatorname{Cov}(W_s, W_t) = \min\{s, t\}.$$
- **Invariancias** (Proposición 3.6): $-W_t$, $c^{-1/2}W_{ct}$, $W_{s+t} - W_s$ y $tW_{1/t}$ son movimientos brownianos; $W_t/t \to 0$ (Corolario 3.5); $e^{-t}W_{e^{2t}}$ es estacionario (Ejemplo 3.7).
- **Densidad de transición** (Proposición 3.9): $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-(y-x)^2/2t}$ satisface Chapman–Kolmogorov y la ecuación del calor $\partial_t p = \frac{1}{2}\partial_{yy} p$.
- **Martingalas** (Proposición 3.10): W_t, $W_t^2 - t$ y $e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2}$.
- **Trayectorias**: variación cuadrática $\sum(\Delta_k W)^2 \to t$ (Teorema 3.13); variación total infinita (Corolario 3.14); no diferenciables (Teorema 3.15).
- **Principio de reflexión** (Teorema 3.16): $\mathbb{P}[\max_{s \le t} W_s \ge a] = 2\mathbb{P}[W_t \ge a]$.

4. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Sean X y Y procesos definidos en el mismo espacio de probabilidad.

(a) Demuestre que si X y Y son indistinguibles, entonces Y es una modificación de X.

(b) Demuestre que si Y es una modificación de X, entonces X y Y tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales.

Sugerencia: Para $t_1 < \cdots < t_n$, el evento $[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \neq (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})]$ está contenido en $\bigcup_k [X_{t_k} \neq Y_{t_k}]$.

(c) ¿Por qué el recíproco de (b) no tiene sentido en general?

Ejercicio 4.2 (Fase aleatoria)**.** Sea $X_t = \cos(t + U)$, con U uniforme en $[0, 2\pi]$, como en el Ejemplo 1.2.

(a) Demuestre que $\operatorname{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2}\cos(t - s)$.

(b) ¿Es X un proceso gaussiano? Justifique.

(c) Demuestre que, para cada $h \ge 0$, el proceso $(X_{t+h})_{t \ge 0}$ tiene la misma media y la misma covarianza que X.

Respuestas. (a) Use $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ y que $\mathbb{E}[\cos(s + t + 2U)] = 0$. (b) No: $|X_t| \le 1$, y una variable normal con varianza $\frac{1}{2} > 0$ no es acotada. (c) La media es 0 y la covarianza sólo depende de $t - s$.

Ejercicio 4.3. Sea $Z \sim N(0, 1)$ y sea $X_t = t\,Z$, $t \ge 0$.

(a) Demuestre que X es un proceso gaussiano y calcule su media y su covarianza.

(b) ¿Tiene X incrementos independientes? ¿Incrementos estacionarios?

(c) Compare con el movimiento browniano: ambos satisfacen $X_t \sim N(0, \cdot)$ y $X_0 = 0$. ¿Qué propiedad de la Definición 3.1 falla?

Respuestas. (a) $m(t) = 0$, $C(s, t) = st$. (b) Los incrementos no son independientes: $\operatorname{Cov}(X_1 - X_0, X_2 - X_1) = \operatorname{Cov}(Z, Z) = 1 \neq 0$. Sí son estacionarios, pues $X_{t+h} - X_{s+h} = (t - s)Z$. (c) Falla (b) y también (c), pues $\operatorname{Var}(X_t) = t^2 \neq t$.

Ejercicio 4.4. Sea τ un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$.

(a) Demuestre que $[\tau < t] \in \mathcal{F}_t$ para todo $t > 0$.

Sugerencia: $[\tau < t] = \bigcup_{n\geq 1}[\tau \leq t - 1/n]$.

(b) Sea X un proceso adaptado con trayectorias continuas y sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\tau = \text{ínf}\{t \geq 0 \mid X_t \geq a\}$ es un tiempo de paro.

Sugerencia: Use el Ejemplo 1.42 con $F = [a, \infty)$.

Ejercicio 4.5. Sea X un proceso con incrementos independientes con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$, con $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$ para todo t, y sea $M_t = X_t - \mathbb{E}[X_t]$. Demuestre que $M_t^2 - \text{Var}(X_t)$ es una martingala. Deduzca que $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_s) + \text{Var}(X_t - X_s)$ para $s < t$.

Sugerencia: Imite la demostración de la Proposición 2.14.

Ejercicio 4.6 (Momentos de la distribución de Poisson)**.** Sea $X \sim \text{Poisson}(a)$, $a > 0$.

(a) Demuestre que su función generadora de probabilidades es $\mathbb{E}[s^X] = e^{a(s-1)}$, para $s \in \mathbb{R}$.

(b) Deduzca que $\mathbb{E}[X] = a$ y $\mathbb{E}[X(X-1)] = a^2$; concluya que $\text{Var}(X) = a$.

(c) Si (N_t) es un proceso de Poisson con intensidad λ, calcule $\mathbb{E}[N_t^2]$ y $\mathbb{E}\big[2^{N_t}\big]$.

Respuestas. (b) Derive en $s = 1$ una y dos veces. (c) $\mathbb{E}[N_t^2] = \lambda t + (\lambda t)^2$ y $\mathbb{E}[2^{N_t}] = e^{\lambda t}$.

Ejercicio 4.7 (Competencia entre exponenciales)**.** Sean $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$ y $\eta \sim \text{Exp}(\mu)$ independientes.

(a) Demuestre que $\text{mín}\{\xi, \eta\} \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$.

(b) Demuestre que $\mathbb{P}[\xi < \eta] = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

(c) Un banco tiene dos cajeros. Los tiempos de servicio son exponenciales con medias de 4 y 6 minutos, respectivamente. Usted llega cuando ambos están ocupados (y no hay nadie más esperando). ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que se desocupe uno de ellos? ¿Cuál es la probabilidad de que lo atienda el primer cajero?

Respuestas. (a) $\mathbb{P}[\text{mín}\{\xi,\eta\} > t] = \mathbb{P}[\xi > t]\mathbb{P}[\eta > t] = e^{-(\lambda+\mu)t}$. (b) $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-\mu x}\, dx$. (c) Por la pérdida de memoria, con $\lambda = \frac{1}{4}$ y $\mu = \frac{1}{6}$: el tiempo esperado es $1/(\lambda+\mu) = 2{,}4$ minutos y la probabilidad es $\frac{1/4}{5/12} = \frac{3}{5}$.

Ejercicio 4.8. Complete la demostración del Teorema 2.7.

(a) Caso $m = 0$, $k \geq 1$: demuestre que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N_s = k,\ N_{s+t} = k] &= \mathbb{P}[T_k \leq s,\ T_k + \xi_{k+1} > s + t] \\ &= \int_0^s f_k(u)\, e^{-\lambda(s+t-u)}\, du = e^{-\lambda(s+t)} \frac{(\lambda s)^k}{k!}.\end{aligned}$$

(b) Caso $m = 1$, $k \geq 1$: proceda como en el texto, pero sin la variable R.

(c) Caso $k = 0$: observe que $[N_s = 0,\ N_{s+t} = m] = [\xi_1 > s,\ T_m \leq s + t < T_{m+1}]$.

Ejercicio 4.9 (Llegadas a una parada de autobús)**.** Los pasajeros llegan a una parada de autobús según un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 2$ por minuto.

(a) Calcule la probabilidad de que en los primeros 3 minutos lleguen exactamente 4 pasajeros.

(b) Calcule la probabilidad de que en los primeros 3 minutos lleguen 4 pasajeros y en los siguientes 2 minutos no llegue ninguno.

(c) ¿Cuál es el tiempo esperado de llegada del décimo pasajero? ¿Cuál es su varianza?

(d) Si a las 8:00 no ha llegado nadie desde las 7:55, ¿cuál es la probabilidad de que el siguiente pasajero llegue después de las 8:01?

Respuestas. (a) $e^{-6}6^4/4! \approx 0{,}134$. (b) $e^{-6}\frac{6^4}{4!}\cdot e^{-4} \approx 0{,}0025$. (c) $\mathbb{E}[T_{10}] = 5$ minutos, $\mathrm{Var}(T_{10}) = 10/\lambda^2 = 2{,}5$. (d) Por la Observación 2.11, $e^{-2} \approx 0{,}135$.

Ejercicio 4.10. Sea (N_t) un proceso de Poisson con intensidad λ.

(a) Demuestre que $\mathrm{Cov}(N_s, N_t) = \lambda \min\{s,t\}$.

Sugerencia: Si $s < t$, escriba $N_t = N_s + (N_t - N_s)$.

(b) Compare con la covarianza del movimiento browniano. Demuestre que el proceso $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(N_t - \lambda t)$ tiene media 0 y covarianza $\min\{s,t\}$. ¿Es un movimiento browniano?

Respuesta. (b) No: sus trayectorias no son continuas y sus valores no son normales. Sin embargo, por el teorema central del límite, $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(N_t - \lambda t) \xrightarrow{d} N(0,t)$ cuando $\lambda \to \infty$.

Ejercicio 4.11 (Distribución condicional)**.** Sea (N_t) un proceso de Poisson y sean $0 < s < t$ y $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que, condicionado a $[N_t = n]$, la variable N_s tiene distribución binomial con parámetros n y s/t:

$$\mathbb{P}[N_s = k \mid N_t = n] = \binom{n}{k}\Big(\frac{s}{t}\Big)^k\Big(1 - \frac{s}{t}\Big)^{n-k}, \qquad k = 0, \dots, n.$$

Observe que el resultado no depende de λ y que, para $n = 1$, se recupera la Proposición 2.18.

Sugerencia. Utilice la independencia de N_s y $N_t - N_s$ para calcular $\mathbb{P}[N_s = k,\ N_t - N_s = n - k]$.

Ejercicio 4.12 (Proceso de Poisson compuesto)**.** Sea (N_t) un proceso de Poisson con intensidad λ y sean $Z_1, Z_2, \dots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, independientes de (N_t), con $\mathbb{E}[Z_1] = m$ y $\mathbb{E}[Z_1^2] = v < \infty$. Defina

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k \qquad (Y_t = 0 \text{ si } N_t = 0).$$

En un modelo de seguros, N_t es el número de reclamaciones hasta el tiempo t, Z_k es el monto de la k-ésima reclamación y Y_t es el monto total reclamado.

(a) Demuestre que $\mathbb{E}[Y_t] = \lambda t\, m$.

Sugerencia: Condicione en N_t: $\mathbb{E}[Y_t] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[Z_1 + \cdots + Z_n]\,\mathbb{P}[N_t = n]$.

(b) Demuestre que $\mathrm{Var}(Y_t) = \lambda t\, v$.

(c) Si las reclamaciones llegan a razón de 10 por día y cada una tiene un monto exponencial con media de 5000 pesos, calcule la media y la desviación estándar del monto reclamado en un mes de 30 días.

Respuestas. (b) $\mathbb{E}[Y_t^2] = \sum_n (nv + n(n-1)m^2)\mathbb{P}[N_t = n] = \lambda t v + (\lambda t)^2 m^2$. (c) $\lambda t = 300$, $m = 5000$, $v = 2\cdot 5000^2$; media 1 500 000 pesos y desviación estándar $5000\sqrt{600} \approx 122\,474$ pesos.

Ejercicio 4.13. Sean (N_t^1) y (N_t^2) procesos de Poisson independientes con intensidades λ_1 y λ_2 (por ejemplo, llegadas de hombres y de mujeres a una tienda).

(a) Demuestre que la probabilidad de que la primera llegada del proceso $N = N^1 + N^2$ sea de tipo 1 es $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

(b) Dado que en $[0,t]$ hubo n llegadas en total, ¿cuál es la distribución del número de llegadas de tipo 1?

Respuestas. (a) Use el Ejercicio 4.7(b). (b) Binomial con parámetros n y $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$.

Ejercicio 4.14 (Variación cuadrática del proceso de Poisson)**.** Sea (N_t) un proceso de Poisson y sea (Π_n) una sucesión de particiones de $[0,t]$ con $\|\Pi_n\| \to 0$. Demuestre que, casi seguramente,

$$\sum_k \left(N_{t_k} - N_{t_{k-1}}\right)^2 \;\longrightarrow\; N_t.$$

Compare con el Teorema 3.13.

Sugerencia: Si $\|\Pi_n\|$ es menor que la distancia mínima entre los saltos de la trayectoria en $[0,t]$, cada incremento vale 0 o 1.

Ejercicio 4.15. Sea W un movimiento browniano y sean $0 \le s \le t$.

(a) Calcule $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^4]$.

(b) Demuestre que $\mathbb{E}[W_s^2 W_t^2] = st + 2s^2$.

Sugerencia: Escriba $W_t = W_s + (W_t - W_s)$ y use que $\mathbb{E}[Z^4] = 3$ si $Z \sim N(0,1)$.

(c) Calcule $\mathrm{Cov}(W_s^2, W_t^2)$.

(d) Encuentre la distribución de $W_1 + W_2 + W_3$ y calcule $\mathbb{P}[W_1 + W_2 + W_3 > 3]$.

Respuestas. (a) $3(t-s)^2$. (c) $2s^2$. (d) $N(0,14)$, pues $\mathrm{Var} = 1+2+3+2(1+1+2) = 14$; $\mathbb{P} \approx 1 - \Phi(0{,}80) \approx 0{,}212$.

Ejercicio 4.16 (Puente browniano)**.** Sea W un movimiento browniano y sea $B_t = W_t - t\,W_1$, para $t \in [0,1]$.

(a) Demuestre que B es un proceso gaussiano centrado con $B_0 = B_1 = 0$ y

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s(1-t), \qquad 0 \le s \le t \le 1.$$

(b) Demuestre que B_t y W_1 son independientes para cada $t \in [0,1]$.

(c) ¿Tiene B incrementos independientes?

Respuestas. (b) (B_t, W_1) es gaussiano y $\mathrm{Cov}(B_t, W_1) = t - t = 0$. (c) No: $\mathrm{Cov}(B_{1/2} - B_0,\ B_1 - B_{1/2}) = -\frac{1}{4}$.

Ejercicio 4.17. Sean W y $\widetilde{W}$ movimientos brownianos independientes y sea $\rho \in [-1,1]$. Demuestre que

$$X_t = \rho\, W_t + \sqrt{1-\rho^2}\;\widetilde{W}_t$$

es un movimiento browniano, y calcule $\mathrm{Cov}(X_t, W_t)$.

Sugerencia: Use el Teorema 3.3. Para ver que X es gaussiano, note que $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}, \widetilde{W}_{t_1}, \ldots, \widetilde{W}_{t_n})$ es un vector gaussiano.

Ejercicio 4.18 (Ornstein–Uhlenbeck)**.** Sea $U_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$ el proceso del Ejemplo 3.7.

(a) Para $s < t$, demuestre que $U_t - e^{-(t-s)}U_s$ es independiente de U_s y tiene distribución $N\big(0, 1 - e^{-2(t-s)}\big)$.

(b) Deduzca que, dado $U_s = x$, la variable U_t tiene distribución $N\big(xe^{-(t-s)},\, 1 - e^{-2(t-s)}\big)$. ¿Qué ocurre cuando $t \to \infty$?

Respuestas. (a) (U_s, U_t) es gaussiano y $\mathrm{Cov}(U_t - e^{-(t-s)}U_s, U_s) = e^{-(t-s)} - e^{-(t-s)} = 0$; la varianza es $1 - 2e^{-2(t-s)} + e^{-2(t-s)}$. (b) La distribución condicional tiende a $N(0,1)$, sin importar x: el proceso "olvida" su estado inicial.

Ejercicio 4.19 (Ecuación del calor)**.** Sea $f(y) = y^2$ y sea $u(t,x) = \mathbb{E}[f(x + W_t)]$.

(a) Calcule $u(t,x)$ explícitamente.

(b) Verifique que $\partial_t u = \frac{1}{2}\partial_{xx} u$ y que $u(0,x) = f(x)$.

(c) Repita con $f(y) = e^{\sigma y}$ y compare con la Proposición 3.10(c).

Respuestas. (a) $u(t,x) = x^2 + t$. (c) $u(t,x) = e^{\sigma x + \sigma^2 t/2}$.

Ejercicio 4.20 (Martingalas polinomiales)**.** Sea W un movimiento browniano.

(a) Demuestre que $W_t^3 - 3tW_t$ es una martingala.

(b) Desarrollando $\exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)$ en serie de potencias de σ, identifique los coeficientes de σ, σ^2 y σ^3 con las martingalas W_t, $\frac{1}{2}(W_t^2 - t)$ y $\frac{1}{6}(W_t^3 - 3tW_t)$.

Sugerencia: En (a), escriba $W_t = W_s + D$ y use $\mathbb{E}[D] = \mathbb{E}[D^3] = 0$, $\mathbb{E}[D^2] = t - s$.

Ejercicio 4.21 (Tiempo esperado de salida)**.** Sean $a, b > 0$ y sea τ el tiempo de salida de $(-b, a)$ del Ejemplo 3.12.

(a) Usando que $W_t^2 - t$ es una martingala y el Teorema 3.11 aplicado a la martingala detenida en $\tau \wedge n$, demuestre que $\mathbb{E}[W_{\tau\wedge n}^2] = \mathbb{E}[\tau \wedge n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(b) Haciendo $n \to \infty$, deduzca que

$$\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[W_\tau^2] = a^2 \frac{b}{a+b} + b^2 \frac{a}{a+b} = ab.$$

(c) Compare con la ruina del jugador para la caminata aleatoria simétrica.

Sugerencia: En (b), use el teorema de convergencia monótona en el lado derecho y el de convergencia acotada en el izquierdo.

Ejercicio 4.22 (El máximo del movimiento browniano)**.** Sea $M_t = \max_{0\le s\le t} W_s$.

(a) Demuestre que M_t tiene la misma distribución que $|W_t|$, y calcule su densidad.

(b) Calcule $\mathbb{E}[M_t]$.

(c) Calcule $\mathbb{P}[M_1 \ge 1]$ y $\mathbb{P}[\tau_1 \le 4]$.

(d) Usando la Proposición 3.6(b), demuestre que $\tau_a \overset{d}{=} a^2\,\tau_1$.

Respuestas. (a) $f_{M_t}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}$, $x \ge 0$. (b) $\mathbb{E}[M_t] = \sqrt{2t/\pi}$. (c) $\mathbb{P}[M_1 \ge 1] = 2(1 - \Phi(1)) \approx 0{,}317$ y $\mathbb{P}[\tau_1 \le 4] = 2(1 - \Phi(1/2)) \approx 0{,}617$. (d) τ_a para W es igual a a^2 veces el tiempo de llegada a 1 del browniano $a^{-1}W_{a^2 t}$.

Ejercicio 4.23 (Movimiento browniano geométrico)**.** Sea $S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma W_t\right)$ como en el Ejemplo 3.8, con $S_0 = 100$, $\mu = 0{,}05$ y $\sigma = 0{,}2$ (el tiempo se mide en años).

(a) Calcule $\mathbb{E}[S_1]$ y $\mathrm{Var}(S_1)$.

(b) Calcule $\mathbb{P}[S_1 > 100]$ y la mediana de S_1.

(c) ¿Para qué valor de μ es $(e^{-rt} S_t)$ una martingala, donde $r > 0$ es una tasa de interés?

Sugerencia: Use la Proposición 3.10(c).

Respuestas. (a) $\mathbb{E}[S_1] = 100e^{0{,}07} \approx 107{,}25$ y $\mathrm{Var}(S_1) = 100^2 e^{0{,}14}(e^{0{,}04} - 1) \approx 469{,}4$. (b) $\mathbb{P}[S_1 > 100] = \mathbb{P}[W_1 > -0{,}25] = \Phi(0{,}25) \approx 0{,}599$; la mediana es $100e^{0{,}05} \approx 105{,}13$. (c) $\mu = r - \sigma^2/2$.

Ejercicio 4.24 (Ceros del movimiento browniano)**.** Sea W un movimiento browniano.

(a) Usando el Teorema 3.16 y la simetría, demuestre que para cada $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big[\max_{0\le s\le \varepsilon} W_s > 0\Big] = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}\Big[\min_{0\le s\le \varepsilon} W_s < 0\Big] = 1.$$

(b) Deduzca que, casi seguramente, W tiene una infinidad de ceros en $(0, \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$.

Sugerencia: En (a), $\mathbb{P}[\text{máx}_{s\le\varepsilon} W_s > 0] \ge \mathbb{P}[\text{máx}_{s\le\varepsilon} W_s \ge a] = \mathbb{P}[|W_\varepsilon| \ge a]$ *para todo* $a > 0$. *En (b), use el teorema del valor intermedio.*

Ejercicio 4.25. Sean W un movimiento browniano y N un proceso de Poisson de intensidad λ, independientes. Defina

$$X_t := W_t + N_t, \qquad t \ge 0.$$

Calcule $\mathbb{E}[X_t]$ y $\text{Var}(X_t)$. Grafique algunas trayectorias.

Ejercicio 4.26 (Proceso de Bessel)**.** Sean W^1 y W^2 dos movimientos brownianos independientes. El proceso

$$R_t = \sqrt{(W_t^1)^2 + (W_t^2)^2}, \qquad t \ge 0,$$

se denomina **proceso de Bessel de dimensión 2**.

(a) Demuestre que, para $t > 0$ y $r \ge 0$,

$$\mathbb{P}[R_t \le r] = 1 - e^{-r^2/(2t)}.$$

Sugerencia. Observe que R_t^2/t tiene distribución χ^2 con dos grados de libertad.

(b) Deduzca que R_t tiene densidad

$$f_t(r) = \frac{r}{t} e^{-r^2/(2t)}, \qquad r > 0.$$

(c) Calcule $\mathbb{E}[R_t^2]$ y $\text{Var}(R_t^2)$.

Respuestas. (a) Como (W_t^1, W_t^2) tiene densidad $(2\pi t)^{-1} e^{-(x^2+y^2)/(2t)}$, integrando en coordenadas polares se obtiene $\mathbb{P}[R_t \le r] = t^{-1} \int_0^r u e^{-u^2/(2t)}\, du = 1 - e^{-r^2/(2t)}$. (c) $\text{Var}(R_t^2) = 4t^2$.

Ejercicio 4.27 (Generador infinitesimal)**.** Sea $(X_t)_{t\ge0}$ un proceso de Markov. Su generador infinitesimal se define por

$$Af(x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_t)] - f(x)}{t},$$

para las funciones f y los puntos x donde existe el límite. Recuerde que

$$\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}(A \mid X_0 = x), \qquad \mathbb{E}_x[Y] = \int Y \, d\mathbb{P}_x.$$

(a) Demuestre que si $f \in C^2(\mathbb{R})$, entonces

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \int_0^1 (1-u) f''(x+uh)\, du, \quad x, h \in \mathbb{R}.$$

Sugerencia. Observe que la igualdad $g(x+th) - g(x) = \int_0^t g'(x+sh)h\, ds$ implica

$$f(x+h) = f(x) + h\int_0^1 f'(x+sh)\, ds, \qquad f'(x+sh) = f'(x) + h\int_0^s f''(x+uh)\, du.$$

(b) Sea $X_t = x + W_t$, donde W es un movimiento browniano. Demuestre que, si $f \in C^2(\mathbb{R})$ y f'' es acotada, entonces

$$Af(x) = \frac{1}{2} f''(x).$$

Sugerencia. Para cada t, se tiene $W_t \overset{d}{=} \sqrt{t}\, Z$, donde $Z \sim N(0,1)$. Pruebe que

$$\frac{\mathbb{E}[f(x+W_t)] - f(x)}{t} = \mathbb{E}\left[Z^2 \int_0^1 (1-u) f''(x + u\sqrt{t}\, Z)\, du \right]$$

y use el Teorema de convergencia dominada.

(c) Sea $X_t = x + N_t$, donde N es un proceso de Poisson de intensidad $\lambda > 0$. Demuestre que, si f es acotada,

$$Af(x) = \lambda[f(x+1) - f(x)].$$

Sugerencia. Recuerde que $\mathbb{P}[N_t = 0] = 1 - \lambda t + o(t)$, $\mathbb{P}[N_t = 1] = \lambda t + o(t)$ y $\mathbb{P}[N_t \geq 2] = o(t)$.

Referencias

[1] P. Brémaud, *Probability Theory and Stochastic Processes*, Universitext, Springer, Cham, 2020.

[2] Z. Brzeźniak y T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes: A Course Through Exercises*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, London, 1999, capítulo 6, "Stochastic Processes in Continuous Time".

[3] G. Grimmett y D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 3rd ed., Oxford University Press, Oxford, 2001.

[4] S. Karlin y H. M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1975.

[5] L. I. Nicolaescu, *A Graduate Course in Probability*, World Scientific, Singapore, 2023.

[6] J. S. Rosenthal, *A First Look at Rigorous Probability Theory*, 2nd ed., World Scientific, Singapore, 2006.

[7] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, 12th ed., Academic Press, London, 2019.