Cadenas de Markov

D. González Sánchez

Otoño de 2026

1. Ejercicios

Ejercicio 1.1 (Urnas de Ehrenfest)**.** Consideremos dos urnas, A y B, y un total de N bolas. Inicialmente, las bolas se distribuyen de manera arbitraria entre las dos urnas. En cada instante $n = 0, 1, 2, \ldots$ se realiza el siguiente experimento: se elige una de las N bolas al azar, todas con la misma probabilidad, y la bola elegida se cambia de urna.

Sea X_n el número de bolas que se encuentran en la urna A después del n-ésimo experimento.

(a) ¿Cuáles son los posibles valores de X_n? Es decir, determine el espacio de estados de la cadena.

(b) Supongamos que $X_n = i$. Calcule las probabilidades

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 \mid X_n = i)$$

y

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = i).$$

(c) Explique por qué $(X_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov homogénea.

(d) Para $N = 3$, escriba explícitamente la matriz de transición $P = [p_{ij}]$, siguiendo el orden de los estados

$$S = \{0, 1, 2, 3\}.$$

(e) Calcule $\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_0 = i)$.

Ejercicio 1.2 (Ruina del jugador)**.** Dos jugadores, A y B, juegan una sucesión de partidas. En cada partida uno de ellos puede ganar una unidad monetaria del otro. La probabilidad de que A gane una partida es p, y la probabilidad de que B gane es $q = 1 - p$. Los resultados de las partidas son independientes.

El jugador A comienza con N unidades monetarias y el jugador B con M unidades. El juego termina cuando alguno de los dos jugadores se queda sin dinero. Sea X_n la cantidad de dinero que tiene A después de n partidas.

(a) Determine el espacio de estados de (X_n).

(b) Supongamos que $X_n = i$, donde $0 < i < N + M$. Calcule

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 \mid X_n = i)$$

y

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = i).$$

(c) ¿Qué ocurre cuando $X_n = 0$ o cuando $X_n = N + M$? Determina las probabilidades de transición correspondientes.

(d) Verfique que $(X_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov homogénea y escriba sus probabilidades de transición

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

(e) Para $N + M = 4$, escriba explícitamente la matriz de transición P. Calcula $\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_0 = 2)$.

Ejercicio 1.3 (Movilidad social)**.** Consideremos una población cuyos individuos pueden clasificarse, de manera simplificada, en tres niveles socioeconómicos

$$S = \{B, M, A\},$$

donde B, M y A representan los niveles bajo, medio y alto, respectivamente. Supongamos que el nivel socioeconómico de una persona en una generación depende probabilísticamente de su nivel en la generación anterior. La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}23 & 0{,}02 \\ 0{,}15 & 0{,}70 & 0{,}15 \\ 0{,}03 & 0{,}22 & 0{,}75 \end{pmatrix}.$$

(a) Supongamos que inicialmente el 50 % de la población pertenece al nivel bajo, el 40 % al nivel medio y el 10 % al nivel alto. Escribe la distribución inicial μ_0 y calcula la distribución μ_1 después de una generación.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que una familia que actualmente pertenece al nivel bajo vuelva a estar en el nivel bajo en dos generaciones?

(c) Supongamos que una familia pertenece al nivel bajo en una determinada generación. ¿Cuál es la probabilidad de que ascienda dos niveles socioeconómicos en las dos generaciones siguientes, pasando de bajo a medio y posteriormente de medio a alto? Interprete en términos de porcentajes.

Sugerencia: Calcule $\mathbb{P}(X_1 = M, X_2 = A \mid X_0 = B)$.

Ejercicio 1.4. Demuestre que si P y Q son matrices estocásticas del mismo tamaño, entonces PQ es una matriz estocástica. Pruebe también que si μ es una distribución, μP también lo es.

Ejercicio 1.5. Si (X_n) es una CMH con matriz de transición P, demuestre que $Y_n := X_{2n}$ es una CMH con matriz de transición P^2.

Ejercicio 1.6 (Historias incompletas)**.** Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una CMH con espacio de estados S. Sean $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n$ y sean $x, y, x_{n_1}, \ldots, x_{n_k} \in S$. Defina

$$A = [X_{n_1} = x_{n_1}, \ldots, X_{n_k} = x_{n_k}, X_n = x],$$

y suponga que $\mathbb{P}(A) > 0$. Para la historia $h = (y_0, \ldots, y_n) \in S^{n+1}$, defina

$$B_h = [X_0 = y_0, \ldots, X_n = y_n].$$

(a) Sea Γ el conjunto de historias h tales que

$$y_{n_i} = x_{n_i}, \quad i = 1, \ldots, k, \qquad y_n = x.$$

Explique por qué $\mathbb{P}(X_{n+1} = y, A) = \sum_{h\in\Gamma} \mathbb{P}(X_{n+1} = y, B_h)$. Demuestre que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y, A) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)\mathbb{P}(A).$$

Sugerencia: Observe que $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid B_h) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$*, para cualquier* $h \in \Gamma$.

(b) Demuestre por inducción sobre $m \geq 1$ que

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid A) = \mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid X_n = x).$$

Sugerencia: De (a) se tiene el caso $m = 1$.

Ejercicio 1.7. Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una CMH con espacio de estados S y matriz de transición $P = [P(x, y)]$. Suponga que T es un tiempo de paro respecto a la filtración natural de (X_n), y sea $(x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de estados. Para $n \geq 0$ y la historia $h = (x_0, \ldots, x_{n-1}, x) \in S^{n+1}$, defina los eventos

$$E_n = [T = n,\ X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1},\ X_n = x]$$

y

$$B_h = [X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1},\ X_n = x].$$

(a) Usando la igualdad $\mathbf{1}_{[T=n]} = \varphi_n(X_0, \ldots, X_n)$, para alguna función medible φ_n con valores en $\{0, 1\}$, demuestre que

$$E_n = \begin{cases} B_h & \text{si } \varphi_n(h) = 1, \\ \varnothing & \text{si } \varphi_n(h) = 0. \end{cases}$$

(b) Si $\mathbb{P}(E_n) > 0$, demuestre que

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid E_n) = p_m(x, y).$$

Sugerencia: Argumente por qué $E_n = B_h$.

Ejercicio 1.8 (Propiedad fuerte de Markov)**.** En el contexto del Ejercicio 1.7, sea

$$E = [X_k = x_k,\ 0 \leq k < T,\ X_T = x],$$

y suponga que $\mathbb{P}(E) > 0$.

(a) Demuestre que

$$\mathbb{P}(X_{T+m} = y \mid E) = p_m(x, y).$$

Sugerencia: Observe que $[X_{T+m} = y] \cap E_n = [X_{n+m} = y] \cap E_n$. Use el Ejercicio 1.7(b), es decir $\mathbb{P}(X_{n+m} = y, E_n) = p_m(x, y)\,\mathbb{P}(E_n)$ y sume sobre n .

(b) Sea $E' = [X_T = x]$. Demuestre que

$$\mathbb{P}(X_{T+m} = y \mid E') = p_m(x, y),$$

Sugerencia: Note que $E \subseteq E'$, luego $\mathbb{P}(E') > 0$. Repita el argumento de (a) con $E'_n = [T = n,\ X_n = x]$.

(c) Concluya la **propiedad fuerte de Markov**

$$\mathbb{P}(X_{T+m} = y \mid X_k = x_k,\ 0 \leq k < T,\ X_T = x) = \mathbb{P}(X_{T+m} = y \mid X_T = x).$$

Referencias

[1] P. Brémaud, *Probability Theory and Stochastic Processes*, Universitext, Springer, Cham, 2020.

[2] Z. Brzeźniak y T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes: A Course Through Exercises*, capítulo 5, "Markov Chains".

[3] G. Grimmett y D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 3rd ed.,